Exercice 1

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose $u_n = |\frac{x^n}{n^2}|$. La règle de d'Alembert nous donne alors $R = 1$.
2. La série $f(1)$ converge d'après le théorème de Riemann. La série $f(-1)$ converge absolument.
   Ainsi f est définie sur $[-1, 1]$.
3. Par dérivation terme à terme d'une somme de série entière (à l'intérieur du domaine de convergence) , on a pour $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ et pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} \times (-\ln(1-x))$. Remarquons que cette relation est encore valable quand $x \to 0$.
4. En séparant les termes d'indices pairs des termes d'indices impairs (les séries convergent), on obtient $f(-1) = P - I$ (en notant P la somme des termes d'indices pairs).
   De plus, $f(1) = P + I$. Or $P = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{1}{4}f(1)$. Ainsi $I = \frac{3}{4}f(1)$ et $f(-1) = -\frac{1}{2}f(1)$.
5. g est définie sur $\{x \in \mathbb{R}|\ x \in [-1, 1[$ et $-\frac{x}{1-x} \in [-1, 1]\}$. Or pour $x \in [-1, 1[$, $1 - x > 0$ et donc $-1 \leqslant -\frac{x}{1-x} \leqslant 1 \iff x - 1 \leqslant -x \leqslant 1 - x \iff 2x - 1 \leqslant 0 \iff x \leqslant \frac{1}{2}$.
   Ainsi g est définie sur $[-1, \frac{1}{2}]$.
6. f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, -\frac{1}{2}[$ d'après le raisonnement précédent. Pour $x \in]-1, \frac{1}{2}[$, $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{(1-x^2)}f'\left(-\frac{x}{1-x}\right)$. Pour $x \neq 0$, $\frac{x}{1-x} \neq 0$ et donc $g'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{1}{(1-x)^2}\frac{(1-x)(\ln\left(1+\frac{x}{1-x}\right))}{x}$. Après simplification, $g'(x) = -\ln(1-x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x(1-x)}\right) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$.
   Cette relation est encore valable en 0 car $g'(0) = f'(0) - 1 \times f'(0) = 0$.
7. Pour $x \in]-1, \frac{1}{2}[$, $g(x) = g(0) + \int\limits_0^x g'(t)\mathrm{d}t = 0 + \left[-\frac{1}{2}\ln^2(1-x)\right]_0^x = -\frac{\ln^2(1-x)}{2}$ (car g' est continue entre 0 et x).
   Si f est bien continue sur $[-1, 1]$ (il manquait cette hypothèse dans l'énoncé) alors g est continue sur $[-1, \frac{1}{2}]$ et $g(\frac{1}{2}) = -\frac{(\ln(2))^2}{2} = f(\frac{1}{2}) + f(-1)$ donc $f(\frac{1}{2}) = -\frac{\ln(2)^2}{2} + \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 2

1. On pose $\overrightarrow{\Omega N} = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$ pour un $\theta \in]-\pi, \pi]$. Alors $N = \begin{pmatrix}1 + \cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$.
   Pour que le triangle $O\Omega N$ soit non aplati, on prend $\theta \neq -\pi, 0, \pi$. Alors la hauteur issue de N est $\mathcal{D}_1 : x = 1+\cos(\theta)$ et la hauteur issue de O est normale à $\overrightarrow{\Omega N}$ donc est la droite $\mathcal{D}_2 : x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = 0$.
   Ainsi le point d'intersection $M : \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ vérifie $x = 1 + \cos\theta$ et $y = -x\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -(1 + \cos(\theta))\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ avec $\sin\theta \neq 0$ car $\theta \neq -\pi, 0, \pi$.
2. (a) On remarque que $\frac{1}{1+u^2} = \cos^2\frac{t}{2}$ Ainsi $\frac{2u}{1+u^2} = 2\tan(\frac{t}{2})\cos^2(\frac{t}{2}) = 2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2}) = \sin(t)$.
   De plus, $1 - u^2 = \frac{\cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2})}{\cos^2\frac{t}{2}}$, donc $\frac{1-u^2}{1+u^2} = \cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2}) = \cos(t)$.
   (b) On effectue le changement de paramètre indiqué dans les relations de la question 1 : on pose $u = \tan\frac{\theta}{2}$. On obtient $u \in \mathbb{R}^*$. Alors $x = 1 + \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{2}{1+u^2}$ et $y = -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}x = -\frac{1-u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}$.
3. A priori, la courbe est définie sur $\mathbb{R}^*$. Or x est une fonction paire et y une fonction impaire. Ainsi le support Γ est symétrique par rapport à (Ox) et on étudie Γ sur $]0, +\infty[$.
   x est clairement décroissante sur $0, +\infty][$. y est dérivable sur $]0, +\infty[$ par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. Soit $u > 0$. $y'(u) = \frac{2u^2(u^2+1)-(u^2-1)(3u^2+1)}{u^2(u^2+1)^2}$.
   Or $2u^2(u^2 + 1) - (u^2 - 1)(3u^2 + 1) = -u^4 + 4u^2 + 1 = -(u^4 - 4u^2 - 1)$. On pose $t = u^2$ et on cherche le signe de $t^2 - 4t - 1$ qui s'annule seulement en $t = 2 + \sqrt{5}$ (car $\sqrt{5} > 2$).
   Ainsi y' s'annule en $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ (noté α), est strictement positive avant et strictement négative après.

u	0	α	$+\infty$
x	2 $\searrow$	$x(\alpha)$	$\searrow$ 0
y	$-\infty$ $\nearrow$	$y(\alpha)$	$\searrow$ 0

La limite de y en $+\infty$ est calculée par équivalents.
On observe une tangente horizontale au point de paramètre α, ainsi qu'une asymptote verticale d'équation $x = 2$ quand $u \to 0$. Remarquons que y s'annule au point de paramètre 1. On pouvait éventuellement étudier la tangente, qui est dirigée par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (voir le calcul de x' plus bas).

Le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point limite de la courbe. On étudie la tangente grâce au résultat de l'énoncé. x est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas et $x'(u) = \frac{-4u}{(1+u^2)^2}$.
Ainsi $\frac{y'(u)}{x'(u)} = \frac{u^4-4u-1}{u^2(1+u^2)^2} \times \frac{(1+u^2)^2}{4u} \underset{+\infty}{\sim} \frac{u^4}{u^6} \times \frac{u^4}{4u} = \frac{u}{4} \underset{+\infty}{\to} +\infty$. Donc la tangente au point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est verticale.

```
>>> U = np.linspace(0.2, 20, 350)
>>> X = 2 / (1 + U**2)
>>> Y = (U**2 - 1) / (U * (U**2 + 1))
>>> plt.plot(X, Y, color="red")
>>> plt.plot(X, -Y, color="blue")
```