# Table des matières



# I Produit scalaire et norme

## I.1 Produit scalaire

**Définition 1**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev. Un produit scalaire sur $E$ est une application $(.|.) : E \times E \to \mathbb{R}$ qui a les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in E$ $(\lambda u + \mu v | w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w)$ et $(u|\lambda v + \mu w) = \lambda(u|v) + \mu(u|w)$.
2. Symétrique : $\forall u, v \in E$ $(u|v) = (v|u)$.
3. Positive : $(u|u) \geqslant 0$.
4. Définie : $(u|u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Notation. Un produit scalaire est aussi parfois noté $\langle u, v \rangle$, ou $u \cdot v$.

**Définition 2**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire. On dit alors que $E$ est un espace préhilbertien réel, et si $E$ est de dimension finie on dit que $E$ est un espace euclidien.

## I.2 Norme et distance

**Définition 3**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.

1. On appelle norme (euclidienne) d'un vecteur $u \in E$ le réel positif $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$.
2. On appelle distance (euclidienne) entre deux vecteurs $u, v \in E$ le réel positif $d(u, v) = \|v - u\| = \|u - v\|$.

**Proposition 1**
Soient $x, y \in E$, un espace préhilbertien.

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$
2. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (identité du parallélogramme)
3. $(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$

**Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire et $u, v \in E$. Alors

$$|(u|v)| \leqslant \|u\|\|v\|$$

Il y a égalité si et seulement si $u$ et $v$ sont colinéaires.

**Corollaire 1 (Minkowski)**
Soient $u, v \in E$.

1. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ avec égalité ssi $u$ et $v$ sont colinéaires de même sens (positivement proportionnels).
2. $|\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|$

**Définition-Proposition 1**
Soit $E$ un espace préhilbertien. La **distance** associée au produit scalaire de $E$ est l'application $d : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array} \right.$. Elle possède les propriétés suivantes.

1. $\forall (x, y) \in E^2$ $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
2. $\forall (x, y) \in E^2$ $d(x, y) \geqslant 0$ et $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation).
3. $\forall (x, y, y) \in E^3$ $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

# II Orthogonalité

## II.1 Familles orthogonales

**Définition 4**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire, $u, v, u_1, \ldots, u_n \in E$

1. On dit que $u$ est unitaire, ou normé si $\|u\| = 1$.
2. $u$ et $v$ sont dits orthogonaux si $(u|v) = 0$. On note $u \perp v$.
3. $(u_1, \dots, u_n)$ est dite orthogonale si les $u_i$ sont orthogonaux deux à deux.
4. $(u_1, \dots, u_n)$ est dite orthonormale si elle est orthogonale et si tous les $u_i$ sont unitaires. Autrement dit $(u_i|u_j) = \delta_{i,j}$.

**Proposition 2**
Soit $E$ un espace préhilbertien et $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et **tous non nuls**. Alors $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

**Proposition 3 (Pythagore)**
Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille orthogonale d'un espace préhilbertien.

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

## II.2 Bases orthonormées

**Théorème 2**
Soit $E$ un ev euclidien (donc $E$ est de dimension finie) et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale** de $E$. Soient $x, y \in E$.

1. $x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$, c'est à dire que l'on peut calculer les coordonnées de $x$ par produit scalaire.
2. On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $x$ dans $\mathcal{B}$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de $y$ dans $\mathcal{B}$. Alors
$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$$
3. Si on note $X = \mathrm{Mat}_B(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ (les colonnes des coordonnées), $(x|y) = {}^tXY$.

**Corollaire 2**
Soit $E$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Alors $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ $a_{i_j} = (f(e_j)|e_i)$.

**Théorème 3 (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)**
Soit $E$ un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Alors il existe une base $(f_1, \dots, f_n)$ de $E$ qui est orthogonale et $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$.

On peut imposer $\|f_i\| = 1$, c'est à dire que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ soit orthonormale (il suffit de diviser $f_i$ par $\|f_i\| \neq 0$). Si on impose de plus que $(e_k|f_k) > 0$ pour tout $k$, alors la famille obtenue est unique.

**Corollaire 3**
Dans un ev euclidien on peut compéter toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (resp. orthonormale) en une base orthogonale (resp. orthonormale).

# III Espaces orthogonaux

## III.1 Orthogonal d'un sev

**Définition 5**
Soient $F, G$ deux sous-espaces de $E$. Ils sont dits orthogonaux ssi $\forall x_F, x_G \in F\times G$ $(x_F|x_G) = 0$.

**Définition 6**
Soit $F$ un sev de $E$. L'orthogonal de $F$ est $F^\perp = \{x \in E| \ \forall x_F \in F \ (x_F|x) = 0\}$. $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de $F$.

**Proposition 4**
Soit $F$ un sev de $E$.

1. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et la somme $F + F^\perp$ est directe.
2. Si $F$ est de dimension finie alors $F \oplus F^\perp = E$ ie $F$ et $F^\perp$ sont supplémentaires dans $E$.

## III.2 Projections et symétries orthogonales

**Définition 7**
Soit $E$ un espace préhilbertien et $F$ un sous-espace de dimension finie de $E$ .

1. La projection orthogonale sur $F$ est la projection sur $F$ parallèlement à (de direction) $F^\perp$.
2. La symétrie orthogonale sur $F$ est la symétrie par rapport à $F$ de direction $F^\perp$.

**Proposition 5**
Soit $E$ un espace préhilbertien et $F$ un sous-espace de dimension finie de $E$ dont une BON est $(f_1, \dots, f_n)$. On note $p_F$ le projecteur orthogonal sur $F$. Alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|f_i)f_i$$

En particulier, si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est une **droite**, $p_F(x) = (x|u)u$ où $u$ est unitaire.

**Définition 8**
Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est appelée retournement, et une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelé réflexion.

**Théorème 4 (Moindres carrés)**
Soit $F$ un sous-espace de dimension finie de $E$. Pour $x \in E$, on note $d(x,F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ la distance de $x$ à $F$.

Il existe un unique $x_0 \in F$ tel que $d(x,F) = d(x,x_0) = \|x - x_0\|$ et donc la borne inférieure est en fait un minimum. $x_0$ est le projeté orthogonal de $x$ sur $F$.

**Corollaire 4 (Inégalité de Bessel)**
Soit $F$ un sous-espace de dimension finie de $E$. On note $p_F$ le projecteur orthogonal sur $F$.

$$\forall x \in E \; \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

# IV Automorphismes orthogonaux

## IV.1 Isométries

**Définition-Proposition 2**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire. On a équivalence entre

1. $f$ conserve le produit scalaire ie $\forall x, y \; (f(x)|f(y)) = (x|y)$
2. $f$ conserve la norme, ie $\forall x \in E \; \|f(x)\| = \|x\|$.

Dans ce cas, $f$ est bijective et est appelé automorphisme orthogonal ou encore isométrie vectorielle.

L'ensemble est automorphismes orthogonaux de $E$ est noté $O(E)$.

**Proposition 6**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $f \in O(E)$
2. L'image de toute BON de $E$ par $f$ est une BON de $E$.
3. L'image d'une certaine BON de $E$ par $f$ est encore une BON de $E$.

**Proposition 7**
La composition de deux isométries est encore une isométrie, et l'inverse (bijection réciproque) d'une isométrie est encore une isométrie.

**Proposition 8**
Soit $f \in O(E)$. Si $F$ est un sous-espace de $E$ stable par $f$ (ie $f(F) \subset F$) alors $F^\perp$ est stable par $f$.

## IV.2 Matrices orthogonales

**Définition 9**
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que $M$ est orthogonale ssi l'endomorphisme canoniquement associé à $M$ est orthogonal. On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonale de taille $n$

**Théorème 5**
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $M \in O_n(\mathbb{R})$.
2. ${}^tMM = I_n$ ou $I_n = M{}^tM$.
3. ${}^tM \in O_n(\mathbb{R})$.
4. Les colonnes de $M$ sont une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le ps canonique.
5. Les lignes de $M$ sont une BON de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le ps canonique.

**Proposition 9**
Soit $E$ un espace euclidien, soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de $E$ et $\mathcal{B}'$ une base de $E$. On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $\mathcal{B}'$ est une BON ssi $P \in O_n(\mathbb{R})$.

**Proposition 10**
L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale et le produit de deux matrices orthogonales est orthogonal.

**Proposition 11**
Soit $E$ un espace euclidien.

1. Soit $\mathcal{B}$ une BON de $E$ et $f \in O(E)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.
2. Réciproquement si $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est une BON quelconque de $E$ alors l'endomorphisme $f$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ est orthogonal.

**Proposition 12**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$M \text{est symétrique et } f \in O(E) \iff f \text{est une symétrie orthogonale}$$

**Théorème 6**
Soit $f \in O(E)$ et $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(f) = \pm 1$, $\det(M) = \pm 1$

**Définition 10**

1. L'ensemble des isométries de $E$ de déterminant 1 est noté $SO(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal de $E$. $f \in SO(E)$ est dite positive (et si $\det(f) = -1$, on dira que $f$ est une isométrie négative)
2. $SO_n(\mathbb{R})$ (aussi noté $SO(n)$) est l'ensemble $\{M \in O(n) | \; \det(M) = 1\}$.

**Proposition 13**
Effectuer un changement de base entre deux bases orthonormées directes ne modifie pas le déterminant d'une famille.

## IV.3 Groupe orthogonal en dimension 2

**Définition 11**
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que cette base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif (c'est à dire vaut 1). On dit qu'elle est indirecte sinon (c'est à dire que le déterminant dans la base canonique vaut -1).

**Définition 12**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

**Proposition 14 (Caractérisation de $O_2(\mathbb{R})$)**
Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.

1. $M \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe $\theta$ tel que $M = R_\theta$. Ainsi les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent entre elles.
2. $\det M = -1$ ssi $M$ est de la forme $S_\theta$

## IV.4 Groupe orthogonal en dimension 3

**Théorème 7**
Soit $f \in O(E)$ avec $E$ de dimension 1.

1. Si $\det f = 1$ alors $f$ est une rotation de l'espace (ou un retournement qui est une rotation d'angle $\pi$).
2. Si $\det f = -1$, alors $f$ est soit une réflexion soit la composée d'une réflexion et d'une rotation (l'axe de rotation étant orthogonal au plan de réflexion).