Table des matières

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels considérés seront des $\mathbb{R}$-ev.

I Produit scalaire et norme

I.1 Produit scalaire

I.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Un produit scalaire sur E est une application $(.|.) : E \times E \to \mathbb{R}$ qui a les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in E$ $(\lambda u + \mu v | w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w)$ et $(u|\lambda v + \mu w) = \lambda(u|v) + \mu(u|w)$.
2. Symétrique : $\forall u, v \in E$ $(u|v) = (v|u)$.
3. Positive : $(u|u) \geqslant 0$.
4. Définie : $(u|u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Notation. Un produit scalaire est aussi parfois noté $\langle u, v \rangle$, ou $u \cdot v$.

Explication Cette définition du produit scalaire nous permet de nous passer de la notion d'angle et de distance (ou norme).

I.1.2 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire. On dit alors que E est un espace préhilbertien réel, et si E est de dimension finie on dit que E est un espace euclidien.

I.1.3 Remarque

1. La bilinéarité implique que $(0_E|u) = (u|0_E) = 0$ pour tout $u \in E$.
2. Pour vérifier qu'une application est bilinéaire, on vérifie une seule linéarité. Ensuite on prouve la symétrie, qui prouve à son tour automatiquement la deuxième linéarité.

I.1.4 Exemple

Il faut connaître ces exemples, ainsi que savoir les prouver.

1. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: $\begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$.
   - Chaque produit $x_i y_i$ égal $y_i x_i$ donc l'application est bien symétrique. Soit $X, X', Y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   - Alors $(\lambda X + \mu X'|Y) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_i + \mu x'_i) y_i = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_i y_i + \mu x'_i y_i) = \lambda(X|Y) + \mu(X'|Y)$.
   - De plus, $\lambda(X|Y) + \mu(X'|Y) = (\lambda X + \mu X'|Y) = (Y|\lambda X + \mu X') = \lambda(Y|X) + \mu(Y|X')$, ce qui prouve la deuxième linéarité, comme prévu.
   - Avec les même notations, $(X|X) = \sum_{k=1}^{n} x_i^2$. Cette somme est composée de termes positifs donc est positive. De plus, elle est nulle ssi tous ses termes sont nuls. Ainsi $(.|.)$ est positive est définie.

   On remarque que $(X|Y) = {}^tXY$ si on prend une notation en colonnes. La linéarité en devient triviale.
2. Méga-exemple : $\begin{cases} \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto & \int_a^b fg \end{cases}$. La symétrie provient de la commutativité du produit dans $\mathbb{R}^{[a,b]}$. La linéarité à gauche est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale.

   Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. Alors $(f|f) = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

   De plus si $(f|f) = 0$ alors $\int_a^b f^2 = 0$ et donc f^2 est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle : elle est nulle sur le segment $[a,b]$. Ainsi $f^2 = 0$ et donc $f = 0$.
3. On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\varphi(P,Q) = \int\limits_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

   Montrons que φ est un produit scalaire. Symétrie, bilinéarité, positivité : voir l'exemple précédent.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$. Montrons que P est le polynôme nul. Pour l'instant on sait que la fonction polynomiale associée est nulle sur le segment $[0,1]$. Ainsi P possède une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

4. Cette fois $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$. Montrons que φ est un produit scalaire. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\varphi(B,A) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \mathrm{tr}\left({}^t({}^tAB)\right) = \varphi(A,B)$ car la trace est invariante par transposition.

   La linéarité à droite est immédiate par composition de deux applications linéaires.

   Calculons $\varphi(A,A)$. On note $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$. Alors $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,i}$ est la somme des carrés de tous les coefficients de A. Ainsi $\varphi(A,A) \geqslant 0$ et on a même $\varphi(A,A) = 0$ ssi tous les termes de la somme sont nuls (somme de réels positifs) ie $A = 0$.

I.1.5 Remarque

On peut le plus souvent définir plusieurs produits scalaires sur un même espace. Par exemple, $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \mapsto xx' + 2yy'$ est un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

I.2 Norme et distance

I.2.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.

1. On appelle norme (euclidienne) d'un vecteur $u \in E$ le réel positif $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$.
2. On appelle distance (euclidienne) entre deux vecteurs $u, v \in E$ le réel positif $d(u,v) = \|v-u\| = \|u-v\|$.

I.2.2 Remarque

On prendra bien garde au fait que la distance ainsi définie dépend du produit scalaire. Calculer $||\vec{\imath}||$ et $||\vec{\jmath}||$, la norme sur $\mathbb{R}^2$ étant associée au produit scalaire de I.1.5.

I.2.3 Proposition

Soient $x, y \in E$, un espace préhilbertien.

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (identité du parallélogramme)
3. $(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$

Preuve.
Calculs directs. ■

I.2.4 Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire et $u, v \in E$. Alors

$$|(u|v)| \leqslant \|u\|\|v\|$$

Il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Preuve.
Soient $u, v \in E$ fixés.

On considère l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (u+tv|u+tv) \end{array}\right.$.

Alors $f \geqslant 0$ par positivité du produit scalaire. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(t) &= (u+tv|u+tv) = (u|u+tv) + t(v|u+tv) = (u|u) + t(u|v) + t(v|u) + t^2(v|v) \\ &= \|u\|^2 + 2t(u|v) + t^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi f est une fonction polynomiale de degré au plus 2.

- Si $v \neq 0$ (ie $\|v\| \neq 0$), alors f est polynomiale de degré 2 et positive. Donc son discriminant est négatif : $\Delta = 4(u|v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leqslant 0$, ce qui est l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
- Si $v = 0$, alors $(u|v) = 0$ et donc l'inégalité est vérifiée.

Dans le cas, $v \neq 0$, l'inégalité est une égalité ssi $\Delta = 0$ ssi f s'annule une fois ssi $\exists t \in \mathbb{R}\ u + tv = 0$ (norme nulle). Ainsi u et v sont colinéaires

Dans le cas $v = 0$, l'égalité est tout le temps vérifié, tout comme le fait d'être colinéaire à 0. ■

I.2.5 Exemple

1. Soients $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors $\left|\int\limits_a^b fg\right| \leqslant \int\limits_a^b |fg| \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2}\sqrt{\int\limits_a^b g^2}$.

   exo : appliquer à $f : t \mapsto t^{-\alpha}, g : t \mapsto t^{\alpha-1}$ pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$ pour retrouver le théorème de croissances comparées.
2. $\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{6}}$.

I.2.6 Exercice
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dont le carré est intégrable sur I. Montrer que $(f,g) \mapsto \int_I fg$ définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})$. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour prouver que fg est intégrable sur I.

I.2.7 Corollaire (Minkowski)
Soient $u, v \in E$.

1. $\|u+v\| \leqslant \|u\|+\|v\|$ avec égalité ssi u et v sont colinéaires de même sens (positivement proportionnels).
2. $|\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u-v\|$

Preuve.
On a immédiatement, d'après Cauchy-Schwarz

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2$$

Comme la fonction racine carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a l'inégalité voulue.

Il y a égalité ssi $(u|v) = \|u\|\|v\|$. Dans ce cas, on a d'après le théorème I.2.4, $u = \lambda v$ ou $v = 0$ et donc $\lambda\|v\|^2 = |\lambda|\|v\|^2$, ie $v = 0$ ou $\lambda \geqslant 0$. Dans les deux cas, u et v sont colinéaires de même sens. La réciproque est immédiate par le même calcul. ∎

I.2.8 Remarque

Faire un dessin : inégalité triangulaire.

I.2.9 Propriétés de la norme

1. $\|u\| = 0 \iff u = 0$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$
3. $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

Toutes les applications qui ont ces trois propriétés sont appelées normes.

I.2.10 Définition-Proposition
Soit E un espace préhilbertien. La **distance** associée au produit scalaire de E est l'application $d : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array} \right.$. Elle possède les propriétés suivantes.

1. $\forall (x,y) \in E^2 \; d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)
2. $\forall (x,y) \in E^2 \; d(x,y) \geqslant 0$ et $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (séparation).
3. $\forall (x,y,y) \in E^3 \; d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

II Orthogonalité

II.1 Familles orthogonales

II.1.1 Définition
Soit E un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire, $u, v, u_1, \dots, u_n \in E$

1. On dit que u est unitaire, ou normé si $\|u\| = 1$.
2. u et v sont dits orthogonaux si $(u|v) = 0$. On note $u \perp v$.
3. $(u_1, \dots, u_n)$ est dite orthogonale si les u_i sont orthogonaux deux à deux.
4. $(u_1, \dots, u_n)$ est dite orthonormale si elle est orthogonale et si tous les u_i sont unitaires. Autrement dit $(u_i|u_j) = \delta_{i,j}$.

Explication La notion d'orthogonalité repose maintenant sur le produit scalaire, contrairement à la géométrie de début d'année. On a pas du tout de notion d'angle.

II.1.2 ATTENTION

Deux vecteurs sont orthogonaux pour un produit scalaire donnée, et pas forcément pour le produit scalaire voisin...

II.1.3 Exemple
Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique.

Montrer que 1 et $t \mapsto \sin(2\pi t)$ sont orthogonales pour le produit scalaire que l'on connaît sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

II.1.4 Passer à une famille orthonormale

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs orthogonaux tous non nuls. Alors $(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|})$ est une famille orthonormale.

II.1.5 Proposition
Soit E un espace préhilbertien et $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et **tous non nuls**. Alors $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est libre.

Preuve.
Supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$. Alors en effectuant le produit scalaire par u_i on obtient $\lambda_i \|u_i\|^2 = 0$, d'où $\lambda_i = 0$. ∎

II.1.6 Remarque

On peut supposer que la famille (u_i) est une famille infinie et faire la même preuve pour toute sous-famille finie. Ainsi la proposition précédente est valable pour une famille quelconque.

II.1.7 Proposition (Pythagore)
Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille orthogonale d'un espace préhilbertien.

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Preuve.
Simple calcul de bilinéarité. ■

II.2 Bases orthonormées

II.2.1 Théorème
Soit E un ev euclidien (donc E est de dimension finie) et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale** de E. Soient $x, y \in E$.

1. $x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$, c'est à dire que l'on peut calculer les coordonnées de x par produit scalaire.
2. On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de y dans $\mathcal{B}$. Alors
$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$$
3. Si on note $X = \mathrm{Mat}_B(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ (les colonnes des coordonnées), $(x|y) = {}^tXY$.

Preuve.
1. On a $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Ainsi $(x|e_1) = x_1(e_1|e_1) + x_2(e_2|e_1) + \dots x_n(e_n|e_1) = x_1$ (par linéarité du produit scalaire et orthogonalité de la famille).
2. On a par le même calcul $(x|y) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_iy_j(e_i|e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ car tous les autres termes sont nuls. ■

II.2.2 Exemple
Montrer que la famille $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^2$.

Donner les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans cette base. Faire le lien avec les matrices de passage.

II.2.3 Corollaire
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $a_{i_j} = (f(e_j)|e_i)$.

Preuve.
On a en effet, pour un $j \in [\![1,n]\!]$ fixé $f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(e_j)|e_i)e_i$ d'après le théorème précédent. ■

II.2.4 Théorème (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)
Soit E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une base $(f_1, \dots, f_n)$ de E qui est orthogonale et $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$.

On peut imposer $\|f_i\| = 1$, c'est à dire que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ soit orthonormale (il suffit de diviser f_i par $\|f_i\| \neq 0$). Si on impose de plus que $(e_k|f_k) > 0$ pour tout k, alors la famille obtenue est unique.

Preuve.
On note $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

Dessin

On pose P_k : "il existe une famille orthogonale $(f_1, \dots, f_k)$ telle que $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k) = F_k$"

— P_1 est clairement vraie, il suffit de poser $f_1 = e_1$. (ou $\frac{e_1}{\|e_1\|}$).

Il existe clairement un seul vecteur de $\mathrm{Vect}(e_1)$ de norme 1 et tel que $(f_1|e_1) > 0$, et c'est $\frac{e_1}{\|e_1\|}$ (et on a $(e_1|f_1) = \|e_1\| > 0$).

— Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, on suppose que P_k est vraie.

On remarque d'abord que $e_{k+1} \notin F_k$, d'après la liberté de la famille $(e_i)_i$. On cherche f_{k+1} sous la forme $e_{k+1} - x$, avec $x \in F_k = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \text{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$. On écrit donc $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ik} f_i$. On veut maintenant

$$\forall i \in [\![1, k]\!] \ (e_{k+1} - x | f_i) = 0 \text{ ie } \forall i \in [\![1, k]\!] (e_{k+1}|f_i) - \alpha_{ik}\|f_i\|^2 = 0$$

On pose donc $f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(e_{k+1}|f_i)}{\|f_i\|^2} f_i \neq 0$ car $e_{k+1} \notin F_k$. C'est un vecteur de F_{k+1} mais pas de F_k, donc $\text{Vect}(f_1, \ldots, f_{k+1}) = F_{k+1}$.
Tout vecteur de $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_{k+1})$ qui n'est pas dans $\text{Vect}(e_1, \ldots e_k)$ s'écrit $\lambda e_{k+1} - x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $x \in F_k$. Ainsi d'après le calcul précédent tout vecteur orthogonal à tous les f_i pour $i \in [\![1, k]\!]$ est de la forme λf_{k+1}. Il existe un seul vecteur de norme 1 et tel que $(u|e_{k+1}) > 0$ dans $\mathbb{R} f_{k+1}$, c'est le vecteur $\pm \frac{f_{k+1}}{\|f_{k+1}\|}$ (le signe étant choisi pour garder le produit scalaire positif).

— Par récurrence, une base orthogonale de E existe. ■

II.2.5 En pratique

Il faut connaître le résultat général, et savoir appliquer pour de "petites familles". Pour savoir appliquer, il faut retenir la forme sous laquelle on cherche chaque vecteur.

II.2.6 Exemple
On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ qui soit échelonnée en degré.

II.2.7 Remarque

1. Ainsi tout ev euclidien admet une BON.
2. Le procédé de Gram-Schmidt ne change pas une famille orthogonale (sauf à la normaliser si on veut obtenir une BON).

II.2.8 Exemple
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On munit cet espace du produit scalaire canonique. Transformer $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ en une BON.

II.2.9 Remarque

Si on orthonormalise $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$, la condition de conservation des espaces vectoriels croissants assure que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ (la matrice de passage) est triangulaire supérieure.

II.2.10 Corollaire
Dans un ev euclidien on peut compéter toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (resp. orthonormale) en une base orthogonale (resp. orthonormale).

Preuve.
Base incomplète + Gram-Schmidt qui ne change pas les familles orthogonales. ■

III Espaces orthogonaux

E est toujours un espace préhilbertien.

III.1 Orthogonal d'un sev

III.1.1 Définition
Soient F, G deux sous-espaces de E. Ils sont dits orthogonaux ssi $\forall x_F, x_G \in F \times G \ (x_F|x_G) = 0$.

III.1.2 Exemple
Trouver un exemple dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique. Preuve avec les bases, avec les équations.

III.1.3 Remarque

Il suffit de vérifier l'orthogonalité deux à deux de familles génératrices (ou de bases) de F et G.

III.1.4 Remarque

En particulier, $x \in E$ est orthogonal à F si $x \perp f_i$ pour tout i où F est engendré par les f_i.

III.1.5 Définition
Soit F un sev de E. L'orthogonal de F est $F^\perp = \{x \in E | \ \forall x_F \in F \ (x_F|x) = 0\}$. $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F.

III.1.6 Exemple
1. $\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0\}$.
2. Calculer l'orthogonal de $y = x$ dans $\mathbb{R}^2$.

III.1.7 Attention

On considère D une droite de l'espace et F un sev de $\mathbb{R}^3$. On peut avoir $D \perp F$ sans que $F = D^\perp$. En particulier deux droites peuvent être orthogonales, mais l'orthogonal de D est un plan.

III.1.8 Proposition
Soit F un sev de E.

1. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et la somme $F + F^\perp$ est directe.
2. Si F est de dimension finie alors $F \oplus F^\perp = E$ ie F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E.

Preuve.

1. On a déjà clairement $0 \in F^\perp$, qui est donc non vide. De plus, la linéarité (à gauche par exemple) du produit scalaire nous assure immédiatement que $F^\perp$ est stable par combinaison linéaire.
   De plus, si $x \in F \cap F^\perp$ alors $x \perp x$ ie $(x|x) = 0$ et donc $x = 0_E$. Ainsi la somme (d'espaces) est directe.
2. Soit $(e_1, \dots e_p)$ une base de F que l'on peut supposer orthonormale (quitte à lui appliquer Gram-Schmidt).
   Soit $x \in E$.
   — Analyse. Supposons que l'on ait $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \perp F$. Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $(x|e_i) = (x_1|e_i)$ car $(x_2|e_i) = 0$. Ainsi $x_1 = \sum_{i=1}^{p} (x_1|e_i)e_i = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$ (d'après II.2.1, car F est un espace euclidien)
   — Synthèse. Posons $x_1 = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$ et $x_2 = x - x_1$. Alors par construction, $x_1 \in F$. Montrons que $x_2 \perp F$ ie x_2 est orthogonal à une base de F.
   Or, pour $j \in [\![1, p]\!]$, $(x_2|e_j) = (x|e_j) - (x_1|e_j) = 0$ car
   $$(x_1|e_j) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i) \underbrace{(e_i|e_j)}_{=\delta_{i,j}}.$$
   Finalement, la somme directe $F \oplus F^\perp$ contient E donc F et $F^\perp$ sont supplémentaires. ■

III.1.9 Exercice

1. $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
2. $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$

III.1.10 En dimension finie

Si E est un espace euclidien (de dimension finie), alors tout sous espace est de dimension finie.

1. $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.
2. La concaténation d'une BON de F et d'une BON de $F^\perp$ est une BON de E.
3. Réciproquement, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E telle que $F = \text{Vect}(e_1, \dots e_r)$ (indice : on a appliqué Gram-Schmidt à une base de F complétée en une base de E), alors $F^\perp = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$.

III.1.11 Exemple

1. Calculer le supplémentaire orthogonal de $D : 2x - y = 0$ (dans $\mathbb{R}^2$).
2. Dans $\mathbb{R}^3$, même question avec $D = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $P : 2x + z = 0$.

III.2 Projections et symétries orthogonales

III.2.1 Définition
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E .

1. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à (de direction) $F^\perp$.
2. La symétrie orthogonale sur F est la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$.

III.2.2 Remarque

1. On a bien $E = F \oplus F^\perp$...
2. On pourra se souvenir de la formule $s = 2p - Id$ pour lier les deux objets précédents.
3. pour $x \in E$, on a les deux conditions géométriques $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

III.2.3 Proposition
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E dont une BON est $(f_1, \dots, f_n)$. On note p_F le projecteur orthogonal sur F. Alors
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|f_i)f_i$$

En particulier, si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est une **droite**, $p_F(x) = (x|u)u$ où u est unitaire.

Preuve.
Il s'agit d'un re-formulation de la preuve de III.1.8 ∎

III.2.4 Méthode

1. On essaie de déterminer $p_F(x)$ en remarquant que
$$\begin{aligned} p_F(x) &\in F \\ x - p_F(x) &\perp F \end{aligned}$$
donc est orthogonal à une base de F.
2. On utilise la formule $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|f_i)f_i$ si on connaît une BON de F.

III.2.5 Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est appelée retournement, et une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelé réflexion.

III.2.6 Réduction

Matrice, trace, det dans des bases adaptées.

III.2.7 Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ on pose : $F = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix})$. Calculer les matrices dans la base canonique des projection orthogonales sur F et symétrie orthogonales par rapport à F.

III.2.8 Théorème (Moindres carrés)

Soit F un sous-espace de dimension finie de E. Pour $x \in E$, on note $d(x,F) = \inf_{y \in F} \|x-y\|$ la distance de x à F.

Il existe un unique $x_0 \in F$ tel que $d(x,F) = d(x,x_0) = \|x-x_0\|$ et donc la borne inférieure est en fait un minimum. x_0 est le projeté orthogonal de x sur F.

Preuve.
Notons $x_0 = p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F. Alors $x_0 \in F$ et donc $d(x,F) \leqslant d(x,x_0)$.

De plus, si $y \in F$ alors $x - y = x - x_0 + x_0 - y$ et donc $\|x-y\|^2 = \|x-x_0\|^2 + \|x_0-y\|^2$ car $\underbrace{x-x_0}_{\in F^\perp} \perp x_0 - y$ et d'après le théorème de Pythagore.

Ainsi pour tout $y_1 \in F$ $d(y,y_1) \geqslant d(y,y_0)$ et donc $d(y,F) = d(y,y_0)$. Un minimum est toujours unique. ∎

III.2.9 Remarques

1. Ce théorème donne avant tout l'existence d'un minimum.
2. Avec les notations de la preuve, $d(y,F)^2 = \|y\|^2 - \|p_F(y)\|^2$ (toujours d'après Pythagore). Ainsi, on a un moyen pratique de calculer la valeur de ce minimum, il s'agit de calculer une projection orthogonale.

III.2.10 Traduction dans une BON

Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une BON de F

1. Alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)e_i$.
2. $d(x,F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)^2$.

III.2.11 Exemple

Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (e^x - ax - b)\mathrm{d}t$. Il s'agit de calculer, dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ munit du produit scalaire intégrale, le projeté de l'exponentielle sur le sous espace des fonctions affines (qui est de dimension 2).

III.2.12 Corollaire (Inégalité de Bessel)

Soit F un sous-espace de dimension finie de E. On note p_F le projecteur orthogonal sur F.
$$\forall x \in E \ \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

Preuve.
T. ∎

III.2.13 Exercice

Montrer que cette propriété caractérise les projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs.

IV Automorphismes orthogonaux

Le cadre ici est celui des espaces euclidiens, et plus particulièrement des espaces euclidiens de petites dimension.

IV.1 Isométries

IV.1.1 Définition-Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire. On a équivalence entre

1. f conserve le produit scalaire ie $\forall x, y\ (f(x)|f(y)) = (x|y)$
2. f conserve la norme, ie $\forall x \in E\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Dans ce cas, f est bijective et est appelé automorphisme orthogonal ou encore isométrie vectorielle.

L'ensemble est automorphismes orthogonaux de E est noté $O(E)$.

Preuve.

— $1 \Rightarrow 2$ C'est évident. On pourrait prouver que si f n'est pas forcément linéaire mais conserve le produit scalaire, alors elle est linéaire.

— $2 \Rightarrow 1$ On a pour tous $x, y \in E$

$$\begin{aligned}(f(x)|f(x)) &= \frac{1}{2}(\|\underbrace{f(x)+f(y)}_{=f(x+y)}\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - |y\|^2) = (x|y)\end{aligned}$$

Comme f conserve la norme, on a $f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$ donc f est injective donc bijective car E est de dimension finie. ■

IV.1.2 Exemple

1. L'identité est clairement dans $O(E)$.
2. Toute symétrie orthogonale est dans $O(E)$. Le vérifier en revenant à la définition $s(x) = x_F - x_G$ avec $x_F \perp x_G$.
3. Les projections sur tout sous-espace strict ne sont pas des automorphismes (noyau non trivial).

IV.1.3 Valeurs propres

Soit $f \in O(E)$. On suppose que f possède une valeur propre réelle λ.

Alors pour un vecteur propre $x \in E_\lambda \backslash \{0_E\}$, $\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. Mais $\|f(x)\| = \|x\|$ donc $\lambda = \pm 1$ car $\|x\| \neq 0$.

IV.1.4 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $f \in O(E)$
2. L'image de toute BON de E par f est une BON de E.
3. L'image d'une certaine BON de E par f est encore une BON de E.

Preuve.

— $1 \Rightarrow 2$ Trivial par conservation du ps

— $2 \Rightarrow 3$ ...

— $3 \Rightarrow 1$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une telle BON et $x, y \in E$ de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}(f(x)|f(y)) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i f(e_i) | \sum_{j=1}^n y_j f(e_j)\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j (f(e_i)|f(e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x|y)\end{aligned}$$

d'après II.2.1 ■

IV.1.5 Exemple
Montrer que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \end{pmatrix}$ est orthogonale.

IV.1.6 Proposition
La composition de deux isométries est encore une isométrie, et l'inverse (bijection réciproque) d'une isométrie est encore une isométrie.

Preuve.
Rappel : $O(E)$ contient l'identité.

Soit $f \in O(E)$, alors pour tous $x, y \in E$ on a $(\underbrace{f^{-1}(x)}_{u} | \underbrace{f^{-1}(y)}_{v}) = (f(u)|f(v)) = (x|y)$. La conservation du ps par la composée de deux automorphismes orthogonaux est aussi facile à établir... ■

IV.1.7 Exercice
Dans E euclidien, soit F un sous-espace et $f \in O(E)$. Montrer que $f(F)^\perp = f(F^\perp)$. (inclusion facile + dimension qui est conservée par les iso)

IV.1.8 Proposition
Soit $f \in O(E)$. Si F est un sous-espace de E stable par f (ie $f(F) \subset F$) alors $F^\perp$ est stable par f.

Preuve.
Supposons que F est stable par f et soit $x \in F^\perp$. On doit montrer que $f(x) \in F^\perp$.
Soit donc $y \in F$. Montrons que $(f(x)|y) = 0$. Or $(f(x)|y) = (x|f^{-1}(y))$. De plus, f est bijective donc $f(F) = F$ (égalité des dimensions). Ainsi $f^{-1}(y) \in F$ et donc $(x|f^{-1}(y)) = 0$.
Finalement, $f(x) \in F^\perp$. ■

IV.2 Matrices orthogonales

IV.2.1 Définition
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est orthogonale ssi l'endomorphisme canoniquement associé à M est orthogonal. On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonale de taille n

IV.2.2 Théorème
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
1. $M \in O_n(\mathbb{R})$.
2. ${}^tMM = I_n$ ou $I_n = M{}^tM$.
3. ${}^tM \in O_n(\mathbb{R})$.
4. Les colonnes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le ps canonique.
5. Les lignes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le ps canonique.

Preuve.
1. On commence par prouver $1 \iff 2$. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ on a alors
$$\forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) (MX|MY) = (X|Y) = {}^tX{}^tMMY = {}^tXY$$
On note $A = {}^tMM$. Alors AE_i est la $i$ème colonne de A et $(E_j|C)$ est la $j$ème coordonnée de C donc ${}^tE_jAE_i$ est exactement a_{ij}. Donc $a_{ij} = \delta_{i,j}$ pour tous i et j et finalement $A = I_n$
Maintenant qu'on a ${}^tMM = I_n$ il suffit de transposer pour trouver $M{}^tM = I_n$.
Réciproquement si ${}^tMM = I_n$ alors on a clairement $(MX|MY) = (X|Y)$ pour tous X, Y et donc l'alca de M est orthogonale.
2. $M \in O_n(\mathbb{R}) \iff {}^tMM = I_n \iff M{}^tM = I_n \iff {}^tM \in O_n(\mathbb{R})$.
3. L'image par un auto orthogonal d'une BON est une BON, donc les colonnes de M qui sont l'image de la base canonique forment une BON.
4. Passage à la transposée. ■

IV.2.3 Exemple
1. I_n, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}.
2. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
3. Quelle est la méthode la plus efficace pour vérifier qu'une matrices est orthogonale ?

IV.2.4 Proposition
Soit E un espace euclidien, soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E et $\mathcal{B}'$ une base de E. On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $\mathcal{B}'$ est une BON ssi $P \in O_n(\mathbb{R})$.

Preuve.
On sait qu'on peut utiliser l'expression du ps canonique de $\mathbb{R}^n$ a condition de se placer dans une BON de E et c'est ici le cas. Voir II.2.1 ■

IV.2.5 Exemple
Soit E un espace euclidien de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ avec $f_1 = \frac{2e_1+3e_2}{5}$ et $f_2 = \frac{-3e_1+2e_2}{5}$ est une BON de E.

IV.2.6 Changement de bases orthonormales

Soit E un eve de $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux BON de E. On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
1. $P^{-1} = {}^tP = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

2. Soit $x \in E$ et X le vecteur de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$, X' ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$. On a $X = PX'$ et $X' = {}^tPX$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors $M' = {}^tPMP$.

IV.2.7 Exemple
Dans $\mathbb{R}^2$ on passe de la base canonique à la base u_θ, v_θ. Donner les changements de coordonnées.

IV.2.8 Proposition
L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale et le produit de deux matrices orthogonales est orthogonal.

Preuve.
Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tA = A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Si on a également $B \in O_n(\mathbb{R})$ alors $AB^t(AB) = AB^tB^tA = AI_n{}^tA = I_n$ de donc AB est orthogonale. ∎

IV.2.9 Interprétation géométrique

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors M est la matrice d'une BON dans la base canonique qui est orthonormale. Ainsi M^{-1} est la matrice de la base canonique dans une BON et est donc une matrice orthogonale.

IV.2.10 Proposition
Soit E un espace euclidien.

1. Soit $\mathcal{B}$ une BON de E et $f \in O(E)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.
2. Réciproquement si $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est une BON quelconque de E alors l'endomorphisme f tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ est orthogonal.

Preuve.
1.

Explication A condition de se placer dans une BON, on peut passer des endomorphismes orthogonaux aux matrices orthogonales.

IV.2.11 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$M\text{est symétrique et } f \in O(E) \iff f\text{est une symétrie orthogonale}$$

Preuve.
Si M est symétrique on a à la fois ${}^tM = M$ et ${}^tM = M^{-1}$. Ainsi f est une symétrie. Montrons que $\ker(f - Id_E) \perp \ker(f + Id_E)$. Soient $x_1, x_2 \in E \backslash \{0_E\}$ tels que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = -x_2$ (des vecteurs propres). Montrons que $x_1 \perp x_2$. Or f est une isométrie, donc $(x_1|x_2) = (f(x_1)|f(x_2)) = (x_1| - x_2) = -(x_1|x_2)$ et donc $(x_1|x_2) = 0$. Finalement la symétrie f est bien orthogonale.

Réciproquement, supposons que f est une symétrie orthogonale. Alors $M = M^{-1}$. De plus, M est une matrice orthogonale d'après la proposition précédente, donc $M^{-1} = {}^tM$. ∎

IV.2.12 Théorème
Soit $f \in O(E)$ et $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(f) = \pm 1$, $\det(M) = \pm 1$

Preuve.
Il suffit de le prouver pour M, car la matrice de f dans une BON de E est une matrice orthogonale.

Or $\det(M) = \det({}^tM)$ et ${}^tM = M^{-1}$. Ainsi $\det(M) = \frac{1}{\det(M)}$ et finalement $\det(M) = \pm 1$ ∎

IV.2.13 Définition

1. L'ensemble des isométries de E de déterminant 1 est noté $SO(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal de E. $f \in SO(E)$ est dite positive (et si $\det(f) = -1$, on dira que f est une isométrie négative)
2. $SO_n(\mathbb{R})$ (aussi noté $SO(n)$) est l'ensemble $\{M \in O(n) |\ \det(M) = 1\}$.

IV.2.14 Exercice
Montrer que $SO(n)$ est stable par produit et passage à l'inverse.

IV.2.15 Proposition
Effectuer un changement de base entre deux bases orthonormées directes ne modifie pas les déterminants (des familles ni des applications linéaires).

Preuve.
SI M est la matrice d'une famille dans une première BOND, la matrice dans la nouvelle BOND est $M' = PM$. Comme $\det(P) = 1$, $\det(M') = \det(M)$. ■

IV.3 Groupe orthogonal en dimension 2

On se place dans $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2)$ la base canonique.

IV.3.1 Définition
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que cette base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif (c'est à dire vaut 1). On dit qu'elle est indirecte sinon (c'est à dire que le déterminant dans la base canonique vaut -1).

IV.3.2 Définition
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

IV.3.3 Interprétation géométrique

1. Donner l'image d'un vecteur unitaire par R_θ. C'est la matrice de la rotation d'angle θ
2. On note $\mathcal{D} : -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = 0$. Calculer la matrice de la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$.

IV.3.4 Proposition (Caractérisation de $O_2(\mathbb{R})$)
Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.

1. $M \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe θ tel que $M = R_\theta$. Ainsi les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent entre elles.
2. $\det M = -1$ ssi M est de la forme S_θ

Preuve.

— On commence par remarquer que toutes les matrices R_θ sont clairement dans $SO_2(\mathbb{R})$.
Réciproquement, soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$. Alors $\begin{cases} a^2 + b^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ ad - bc &= 1 \end{cases}$
On peut donc écrire, d'après les deux première équations $a = \cos\varphi, b = \sin\varphi$ et $c = \cos\psi, d = \sin\psi$. Maintenant la condition sur le déterminant est
$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = 1 \text{ ie. } \cos(\varphi + \psi) = 1$$
On en déduit que $\varphi + \psi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\sin\psi = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ et $\cos\psi = \cos\varphi$. CQFD.

— On peut faire la même démonstration avec $\det M = -1$ et trouver le résultat annoncé. ■

IV.3.5 Exemple
Calculer $R_\theta S_\varphi$. On pourra d'abord remarquer que c'est une matrice d'isométrie négative.

IV.3.6 Composition de deux réflexions

La composée de deux réflexion est une rotation du plan. Il reste à déterminer l'angle.

IV.3.7 Valeurs propres

1. Les matrices de rotations $R_\theta \neq I_2$ ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$. Leurs valeurs propres sont $e^{\pm i\theta}$.
2. Les réflexions sont diagonalisables, de valeurs propres 1 et -1 (multiplicité 1).

IV.4 Groupe orthogonal en dimension 3

On se place maintenant dans E espace euclidien de dimension 3, orienté par le choix d'une base $\mathcal{B}_{can}$.

IV.4.1 Etude des valeurs propres

Soit $f \in O(E)$. Comme 3 est impair, χ_f possède une racine réelle qui vaut forcément ± 1. Notons u un vecteur propre associé à $\lambda = \pm 1$.

Alors $P = \mathrm{Vect}(u)^\perp$ est stable par f et $f_{|P}$ est une isométrie d'un plan vectoriel. Ainsi $f_{|P}$ est une rotation ou une réflexion. Si $f_{|P}$ est une réflexion, alors f est une symétrie orthogonale. Dans le cas où $f_{|P}$ est une rotation il y a plusieurs possibilités :

— Cas $\lambda = 1$. f est une rotation de l'espace.

— Cas $\lambda = -1$. f est la composée (commutative) d'une rotation et d'une réflexion. Le plan de réflexion est orthogonal à l'axe de rotation.

IV.4.2 Théorème
Soit $f \in O(E)$ avec E de dimension 1.

1. Si $\det f = 1$ alors f est une rotation de l'espace (ou un retournement qui est une rotation d'angle π).
2. Si $\det f = -1$, alors f est soit une réflexion soit la composée d'une réflexion et d'une rotation (l'axe de rotation étant orthogonal au plan de réflexion).

IV.4.3 Etude d'une matrice orthogonale

Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$. On suppose $M \neq \pm I_3$.

1. Si M est symétrique, c'est la matrice d'une symétrie orthogonale. Si $\mathrm{tr}(M) = 1$ il s'agit d'une réflexion (symétrie par rapport à un plan), si $\mathrm{tr}(M) = -1$ il s'agit d'une symétrie axiale (retournement).
2. Sinon il y a deux cas.
   (a) Si $\det(M) = 1$, alors M est la matrice (dans la base canonique) d'une rotation.
   (b) Si $\det(M) = -1$ alors $-M$ est une rotation.

IV.4.4 Exemple

Soit $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. M est symétrique donc il s'agit d'une matrice de symétrie orthogonale. Comme $\mathrm{tr}(M) = -1$, il s'agit d'une symétrie axiale.

On détermine l'axe comme ensemble des points fixes, ie comme noyau de $M - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Clairement $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $(M - I_3)X = 0$ donc M est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale d'axe $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

IV.4.5 Déterminer une rotation

Soit M une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$.

1. Etape 1 : déterminer l'axe. Il s'agit de l'ensemble des points fixes, ou encore de l'espace propre associé à la valeur propre. On fixe u de norme 1 directeur de l'axe.
2. Etape 2 : déterminer l'angle. On le note $\theta \in]-\pi, \pi]$.
   On a déjà, $\mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos(\theta)$ donc on connaît $\cos(\theta)$ facilement. Il reste à trouver le signe de θ, ie le signe de $\sin(\theta)$.
   Fixons v, w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une BOND. Alors $\det_{\mathcal{B}}(u, v, Mv) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta$.
   Si maintenant $X \in \mathbb{R}^3$ n'est pas sur l'axe de rotation, on écrit $X = au + X_P$ où X_P est non nul et orthogonal à u. Alors, dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (u, \frac{X_P}{\|X_P\|}, u \wedge \frac{X_P}{\|X_P\|})$, $\det_{\mathcal{B}'}(u, X, MX) = \det(u, X_P, MX_P) = \|X_P\|^2 \sin(\theta)$

IV.4.6 Méthode

Pour déterminer l'axe D et l'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ d'une rotation dans l'espace de matrice M dans la base canonique :

1. Trouver D comme noyau de $M - I_3$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ où u est unitaire.
2. Soit X un vecteur $X \notin D$. θ vérifie $\begin{cases} \mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos\theta \\ sg(\sin(\theta)) = sg(\det(u, X, MX)) \end{cases}$ où le déterminant est calculé dans une BOND, de préférence dans la base canonique. En règle générale, on prend X un vecteur de la base canonique.

IV.4.7 Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation dont on précisera un axe dirigé et l'angle correspondant.