TD d'informatique : Résolution d'équations différentielles

Objectifs de cette séance

L'objectif de ce TD d'informatique est d'illustrer l'utilité de l'outil informatique dans la résolution de certains problèmes vus dans le cours de physique. Pour cela, trois situations physiques seront étudiées :

- ▷ L'évolution temporelle de la tension aux bornes d'un condensateur en électronique. Ceci permettra de mettre en oeuvre la méthode d'Euler vue en cours pour la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, ainsi que la comparer à la fonction odeint de python.
- ▷ Le dispositif de déclenchement d'airbag vu dans le devoir surveillé n°3. Cette situation permettra de mettre en oeuvre une résolution d'équation différentielle linéaire d'ordre2.
- ▷ Le tir d'un projectile dans l'air. Le cours a permis d'étudier cette situation dans des modélisations de compléxité croissante, et de mettre en évidence que le modèle de frottement le plus réaliste (avec frottement quadratique) conduit à un système d'équations non-linéaires couplées pour lesquelles la résolution analytique est impossible. L'objectif sera ici de procéder à une résolution numérique de ce système d'équations.

A. Etude de la charge d'un condensateur

A.1. Situation physique étudiée

Le système physique étudié est le suivant :

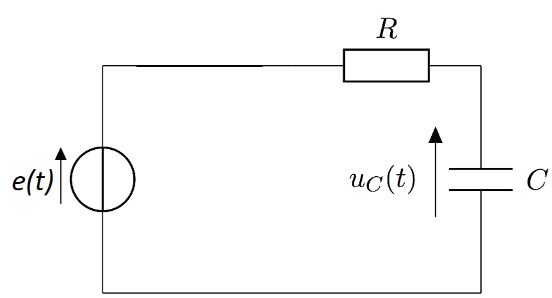

Figure 1: Schéma électrique étudié et notations utiles

Le condensateur est initialement déchargé et le générateur impose un échelon de tension d'amplitude $E = 10\,V$ à l'instant $t = 0$. Pour la suite, on chosira les valeurs numériques :

$$\begin{cases} R = 1,0.10^3\ \Omega \\ C = 1,0.10^{-6}\ F \end{cases}$$

On a vu que ce système conduisait à l'équation différentielle :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{E}{\tau} \text{ où } \tau = RC$$

La résolution analytique de cette équation, en tenant compte des conditions initiales et de la continuité de la tension aux bornes du condensateur amène à :

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right)$$

A.2. Résolution par la méthode d'Euler

A.2.1. Rappel sur la méthode d'Euler

A.2.2. Résolution numérique

- ▷ Ecrire une fonction $euler(f, t0, tf, uc0, n)$ qui permet de tracer la solution de l'équation différentielle précédente en prenant en compte la condition initiale $u_C(t_0) = uc_0$. Elle retournera la liste des temps et la liste des valeurs de $u_C(t)$ correspondante. t_f est l'instant final choisi et n le nombre de pas de calcul considéré.
- ▷ Appliquer cette fonction à la situation précédente et tracer les courbes correspondantes en faisant varier les valeurs de t_f et de n. On pourra tester $n = 20$; $n = 100$. Interprétation?
- ▷ Superposer à cette courbe le tracé direct de la solution.
- ▷ Ecrire une autre fonction euler2(f,T,uc0) où T est la liste des temps où l'on souhaite évaluer $u_C(t)$. Pour la construction pratique de T on utilisera la fonction np.linspace après l'import de numpy dans le préambule.

A.2.3. Tracé du portrait de phase

- ▷ Adapter la fonction précédente pour pouvoir tracer également le portrait de phase, c'est à dire $\frac{du_C}{dt}$ en fonction de u_C. On définira pour cela une fonction $euler3(f, T, uc0)$. Cette fonction retournera en plus la liste des $\frac{du_C}{dt}$.
- ▷ Tracer le portrait de phase correspondant à la situation étudiée.

A.3. Résolution en utilisant la fonction odeint de python

- ▷ Python dispose d'une fonction odeint permettant une résolution numérique directe d'équations différentielles. Ajouter dans le preambule **import scipy.integrate as sci** et taper help(sci.odeint) pour comprendre le fonctionnement de la fonction odeint. La signification des paramètres est proche de la fonction euler2 écrite précédemment.
- ▷ Appliquer la fonction odeint à la situation physique étudiée pour tracer l'évolution temporelle de la tension $u_C(t)$.
- ▷ Superposer la courbe ainsi obtenue aux courbes précédentes. Commentaire?

B. Etude d'un dispositif de déclenchement d'airbag

B.1. Situation physique et objectif

La situation physique étudiée ici est celle vue dans la partie D. du devoir surveillé n°3 : on considère un véhicule doté d'un système d'airbag et on s'intéresse au dispositif de déclenchement de cet airbag. Ce système est constitué d'un ensemble masse-ressort représenté ci-dessous. On suppose par ailleurs que l'impact conduit à un mouvement uniformément décéléré dans lequel la norme de la décélération est a_0.

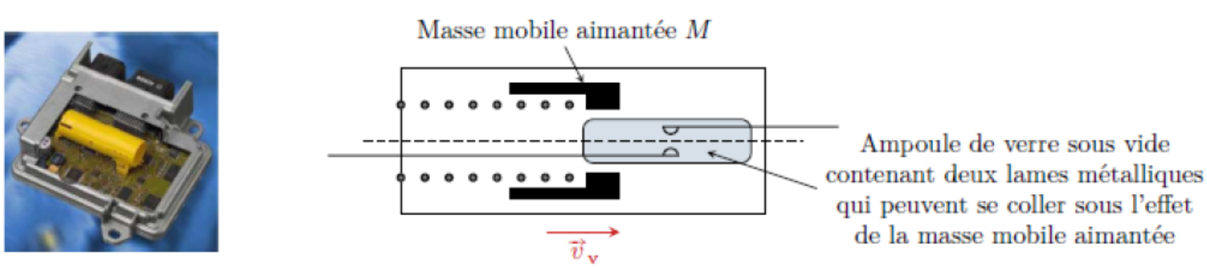

Figure 2: Détecteur de choc. A gauche : photo du détecteur sur son circuit électrique. A droite : Schéma vu en coupe, les points représentent les spires du ressort.

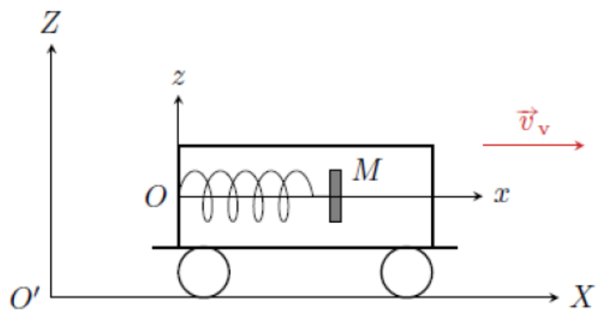

Figure 3: Modélisation du détecteur de choc et notations utiles

La modélisation de ce système a permis d'aboutir à l'équation différentielle régissant la position $x(t)$ de la masse par rapport au véhicule (et donc l'évolution de la longueur du ressort) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_e \text{ avec les valeurs nuémriques de l'énoncé : } \begin{cases} \omega_0 = 70\,rad.s^{-1} \\ Q = 5 \\ x_e = l_0 + \dfrac{a_0}{4900} \text{exprimé en mètres} \end{cases}$$

On suppose par ailleurs que l'impact se produit avec une masse initialement à l'équilibre par rapport au véhicule ($x(0) = l_0$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$) .

On a pu voir que l'airbag se déclenche dès lors que la longueur du ressort excède une certaine longueur $L = 3l_0/2$, les deux lames métalliques entrant alors en contact électrique.

L'objectif est ici de déterminer **la valeur minimale de décélération** lors du choc conduisant au déclenchement de l'airbag. On prendra par la suite $l_0 = 0,01\,m$ pour les applications numériques.

B.2. Résolution numérique de l'équation différentielle et détermination du niveau de déclenchement de l'airbag

- ▷ Tracer les solutions de l'équation différentielle précédente en utilisant la fonction odeint de python pour différentes valeurs de a_0.
- ▷ En déduire la valeur de décélération minimale conduisant au déclenchement de l'airbag. On pourra pour cela superposer la longueur correspondant au déclenchement sur les courbes précédentes.
- ▷ Tracer le portrait de phase correspondant à cette dernière situation.

C. Vers la non-linéarité : le tir d'un projectile dans l'air

On considère dans cette partie un projectile tiré dans l'air avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ à partir d'un point fixant l'origine de la base cartésienne de coordonnées.

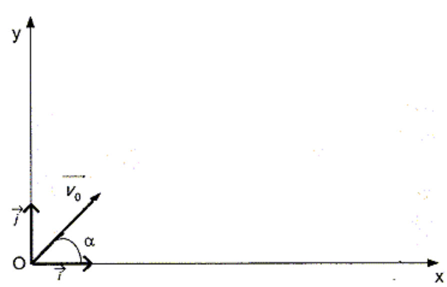

Figure 4: Tir d'un projectile dans l'air et notations

L'objectif est ici de d'étudier la trajectoire de ce projectile dans des modélisations de compléxité croissante.

- ▷ Dans la première modélisation le frottement ne sera pas pris en compte
- ▷ Dans la deuxième modélisation le frottement sera modélisé de façon linéaire.
- ▷ Dans la troisième modélisation, le frottement considéré sera quadratique (proportionnel au carré de la vitesse).

Les deux premières modélisations conduisent à un système d'équations linéaires que l'on peut résoudre analytiquement. Cependant la troisième modélisation amène à l'obtention d'un système d'équations linéaires couplées non linéaires pour lequel la résolution analytique est impossible. Le recours à la résolution numérique s'impose alors.

Pour toute cette partie, on utilisera les paramètres numériques suivants :

$$\begin{cases} m = 1\,kg \\ v_0 = 10\,m.s^{-1} \\ g = 10\,m.s^{-2} \end{cases}$$

C.1. Modèle n°1 : sans frottement

La mise en équation conduit alors au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases}$$

Tracer la trajectoire solution de ce système d'équations, c'est à dire y en fonction de x. On pourra pour cela vectorialiser en dimension 4 et utiliser la fonction odeint.

C.2. Modèle n°2 : avec frottement linéaire

La mise en équation conduit alors au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} \\ m\ddot{y} = -\lambda\dot{y} - mg \end{cases}$$

On prendra la valeur numérique : $\lambda = 1\,kg.s^{-1}$.

Tracer la trajectoire solution de ce système d'équations, c'est à dire z en fonction de x et la superposer à celle obtenue dans la partie précédente.

C.3. Modèle n°3 : avec frottement quadratique non linéaire

La mise en équation conduit alors au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\lambda^{'}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.\dot{x} \\ m\ddot{y} = -\lambda^{'}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.\dot{y} - mg \end{cases}$$

On prendra la valeur numérique : $\lambda^{'} = 0,2\,kg.m^{-1}$.

Tracer à nouveau la trajectoire solution de ce système d'équations et la superposer à celles obtenues précédemment.