

Techniques de base

Exercice 1

Montrer que les fonctions suivantes sont continues :

- $f_1 : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x(t) dt$ sur \mathbb{R}^+ .
- $f_2 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-xt} dt$ sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ puis sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 2

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 :

- $f_1 : x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x \sin(t)) dt$ sur $[-a, a]$ pour $a \in]0, 1[$. Conclusion ?
- $f_2 : x \mapsto \int_0^1 \varphi'(xt) dt$ sur \mathbb{R} où $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Applications

Exercice 3

- Étudier l'existence, la continuité et la dérivabilité sur \mathbb{R} de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

- Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f et en déduire une valeur simple pour $f(x)$ (on pourra admettre pour l'instant que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, voir plus loin.)

Exercice 4

Soit $f(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$ pour $x \in \mathbb{R}$

- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et exprimer f' et f''
- Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f (en simplifiant $f''(x) + f(x)$).
- Donner le développement en série entière de f

Exercice 5

On souhaite calculer $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$

- Montrer que I est convergente.

- On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$. Montrer que f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ en l'étudiant sur $[a, +\infty[$ pour a bien choisi.
- En déduire une expression simple de f puis la valeur de I .

Exercice 6

On considère les fonction $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et exprimer f' .
- Montrer que g est bien définie et est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Donner un lien entre f' , g et g' .
- En déduire un lien entre f et g .
- Calculer la limite en $+\infty$ de f et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 7

Pour $x, y > 0$, on pose $F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$.

- Pour $y > 0$ fixé, montrer que $x \mapsto F(x, y)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.
- Justifier que la question précédente entraîne la classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et en déduire la valeur de $F(x, y)$ pour tout $x, y > 0$.

Exercice 8

- Etude géométrique** Donner un paramétrage par l'abscisse curviligne de la courbe paramétrée vérifiant

$$\gamma(s) = s, \quad M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore, la courbure au point de paramètre s (l'abscisse curviligne d'origine 0) vaut s .

Utilisation : cette courbe paramétrée est utilisée pour amorcer les virages après une ligne droite (voies ferroviaires, sortie d'autoroute) : le fait que la courbure augmente linéairement permet d'éviter l'à-coup que provoquerait le passage d'une ligne droite à un arc de cercle (penser force centrifuge et rayon).

- Point asymptote** Nous allons montrer que la courbe $\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos(u^2) du \\ y(t) = \int_0^t \sin(u^2) du \end{cases}$ possède un point asymptote en $+\infty$.

sède un point asymptote en $+\infty$.

$$\text{Soit } F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto i \int_0^1 \frac{e^{ix^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt + \left(\int_0^x e^{iu^2} du \right)^2.$$

(a) Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Calculer F' . Conclusion ?

INDICATION : effectuer le changement de variable $u = xt$ sur la bonne intégrale...

(b) On pose $G : A \mapsto \int_0^A e^{iu^2} du$. Montrer que G admet une limite complexe en $+\infty$.

(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^2 e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt$.

INDICATION : effectuer une intégration par parties en intégrant $t \mapsto 2t e^{ix^2 t^2}$.

(d) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt$.

(e) En déduire $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$.

(f) Conclure pour notre courbe paramétrée, puis pour celle de la question 1.