Devoir maison n°7

A rendre le 15/02. Vous pouvez rendre une copie pour 2, à condition que chacun rédige.

Exercice 1

Partie I, facultatif sauf 7), à lire tout de même

Soient b et c deux réels. On s'intéresse aux solutions réelles de l'équation différentielle homogène

$$y'' + by' + cy = 0 \quad (\mathcal{E}_H)$$

On suppose que $b^2 - 4c > 0$.

1. Donner les racines r_1 et r_2 du trinome r^2+br+c, et rappeler les relations coefficients-racines (qui premettent d'exprimer en fonction de b et c : $r_1 + r_2$ et r_1r_2).
2. Montrer que toute fonction de la forme $t \mapsto e^{r_it}, i \in \{1, 2\}$, est solution de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour toute solution y de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$:
$$(y' - r_1y)' - r_2(y' - r_1y) = 0$$
4. Montrer que pour toute solution y de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$ il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \ y'(t) - r_1y(t) = C_2e^{r_2t} \text{ et } y'(t) - r_2y(t) = C_1e^{r_1t}$$
5. En déduire que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathcal{E}_H)$ est de la forme :
$$t \mapsto \lambda_1e^{r_1t} + \mu e^{r_2t}$$
où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
6. Bonus : étudions la réciproque. Notons $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \mapsto & f'' + bf' + cf \end{array} \right.$ est linéaire.
   (b) Notons F l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_H)$. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (c) En déduire que $F = \{y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \ \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ y : t \mapsto \lambda e^{r_1t} + \mu e^{r_2t}\}$.
   (d) Quelle est la dimension de F ? Justifier.
7. Etude d'un cas particulier : $b = 0$ et $c = -16$.
   (a) Donner l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_H)$ dans ce cas particulier.
   (b) On adjoint à l'équation différentielle $(\mathcal{E}_H)$ les conditions initiales :
   $$y(0) = 2e, \ y'(0) = 0$$
   Combien de solutions sur $\mathbb{R}$ admet alors ce problème de Cauchy ? Expliciter ensuite ces solutions.

Partie II

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles :

$$(2x - y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} - 16\varphi = 0 \quad (E)$$

sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y^2 < 2x\}$

1. Représenter D. On admettra qu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (défi : le prouver proprement).
2. Soit $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On considère l'application h qui, à tout couple (u, v) de Δ associe : $h(u, v) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right)$. Justifier, en explicitant sa réciproque, que h est une bijection de Δ sur D. Montrer que h et h^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leurs domaines de définition respectifs.
   Note du traducteur : il faudrait montrer la classe $\mathcal{C}^2$.
3. Montrer que la fonction φ, de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, est solution de (E) sur D si et seulement si la fonction ψ, définie, pour tout (u, v) de Δ, par $\psi(u, v) = (\varphi \circ h)(u, v)$ est solution sur Δ de (E') :
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - 16\psi = 0$$
4. Déterminer toutes les solutions de (E') sur Δ.
5. Question bonus : résoudre (E) sur D