Devoir surveillé 2

Durée : 2H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer le devoir.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Soient E, F deux ensembles. Donner la définition de $f : E \to F$ est bijective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\sum_{i=1}^{n} i$ et de $\sum_{p=1}^{n} p^2$.
3. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. A quelle(s) condition(s) les fonctions suivantes sont-elles dérivables ?
   (a) $x \mapsto \sqrt{u}$.
   (b) u^{-1} (la réciproque).
4. Tracer les courbes représentatives de sh et ch sur un même graphique. Faire apparaître les tangentes en $x = 0$.
5. Formules trigonométriques. a, b sont des réels.

   (a) $\cos(a+b)$
   (b) $\sin(a-b)$
   (c) $\cos(2a)$
   (d) $\cos(2a)$
   (e) $\cos(2a)$
   (f) $\sin(2b)$

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de calculer $A = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(2kx)$.

1. On note pour $t \in \mathbb{R}$, $S(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{2t}\right)^k$. Exprimer A en fonction de S.
2. Calculer $S(x)$ en fonction de x.
3. En déduire la valeur de A.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Factoriser $e^{2t} - 1$ par e^t. But : ne plus avoir qu'une seule occurence de la fonction exp.
5. Donner une expression de A qui ne fait pas intervenir la fonction exp mais seulement ch et sh.

Exercice 3

On définit la fonction th par : $\operatorname{th}\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \end{cases}$.

Partie I

Tout d'abord, étudions rapidement cette fonction.

1. Etudier la parité de th.
2. Etudier la dérivabilité de th.
3. Calculer la dérivée de th et justifier que th est strictement croissante.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$.
5. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$.
6. Quelle est la tangente à la courbe de th au point d'abscisse 0 ?
7. Tracer la courbe représentative de th

Partie II

Venons en au fait. On pose $f : t \mapsto \ln(\operatorname{th}(\frac{t}{2}))$.

1. Donner l'ensemble de définition de f, ainsi que son ensemble de dérivabilité.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\operatorname{sh}(2a)$ en fonction de $\operatorname{sh}(a)$ et $\operatorname{ch}(a)$. On attend ici un calcul direct et non une vérification.
3. Justifier que pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a)$. Retrouver le résultat de la question précédente.
4. Calculer la dérivée de f et en déduire les variations de f. On pourra utiliser la partie I pour donner une forme simple de f'.
5. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.
6. Calculer $\operatorname{sh}(\ln(2))$.
7. Calculer l'équation de la tangente à la courbe de f en $\ln(2)$.
8. Tracer la courbe représentative de f. On pourra prendre $\ln(2) \approx \frac{2}{3}$.

Partie III

Etude de la réciproque de f.

La partie précédente montre (il manque encore des arguments, mais passons) que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_-^*$. Notons f^{-1} sa bijection réciproque.

1. Soit $t > 0$. Calculer $\operatorname{sh}(f(t))$ et montrer que $f' = -\operatorname{sh} \circ f$.
2. En déduire une expression simple de $(f^{-1})'$ après avoir montré la dérivabilité de f^{-1} sur un ensemble à préciser.
3. Résoudre l'équation $\frac{e^x-1}{e^x+1} = y$ pour un $y \in]-1, 1[$ fixé et d'inconnue x.
4. En déduire l'expression du procédé de f^{-1} et exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de f pour $x < 0$.

Exercice 4

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Nous allons étudier les différentes moyennes de a et b.

1. Montrer que $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique).
2. Trouver m tel que $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ (la moyenne harmonique de a et b).
3. En choisissant judicieusement a, b, conjecturer une inégalité entre $\sqrt{ab}$ et m.
4. Prouver l'inégalité ainsi conjecturée.
5. Obtenir un encadrement de $\sqrt{11 \times 12}$ et en déduire un encadrement du taux moyen d'augmentation correspondant à deux augmentations successives de 10% et 20%.