Devoir maison n°8

A rendre le 08/03.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

On note, pour tout réel x,

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}\right) \mathrm{d}\theta$$

et on définit l'application f sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f possède une limite finie en $+\infty$ et exprimer ce fait en terme de convergence d'intégrale impropre.
2. (a) g est-elle continue sur $[0, +\infty[$?
   (b) Etudier rapidement la fonction $h : x \mapsto xe^{-x^2}$ définie sur $[0, +\infty[$.
   (c) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$.
3. On définit pour tout réel positif, l'application $\psi : x \mapsto f^2(x) + g(x)$. Montrer que ψ est constante sur $[0, +\infty[$. On pourra effectuer le changement de variable $u = \tan(\theta)$ dans l'intégrale définissant g'.
4. (a) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[\; 0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$.
   (b) Quelle est la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$?
   En déduire la limite valeur de I.
   (c) Calculer J.