I Exercices d'application

Exercice 1
Montrer que

$$\varphi : (P,Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle = \int_0^\pi \sin x \cdot P(x) \cdot Q(x) \,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. En est-il de même de

$$\psi : (P,Q) \mapsto \int_0^\pi \cos x \cdot P(x) \cdot Q(x) \,\mathrm{d}x \text{ ?}$$

Exercice 2
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère
$v = (0,3,1,-1)$ et $w = (1,2,-1,1)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(v,w)$
Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$

Exercice 3
Soit $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, des réels strictement positifs de somme 1. Montrer qu'alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

Exercice 4
1. Montrer que l'application $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 2$, construire une base orthonormale à partir de la base $(1, X, X^2)$.

Exercice 5
Montrer que $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
1. La base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle orthonormale vis-à-vis de ce produit scalaire ?
2. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6
Décrire les endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ euclidien de matrices dans la base canonique :

a) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Exercice 7
1. Donner la matrice dans la base canonique de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
2. Donner la matrice de la réflexion de $\mathbb{R}^3$ de plan $F : 2x - y + z = 0$.

   Déterminer la distance de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ à F.

Exercice 8
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et E un espace euclidien. Soit $a \in E$ un vecteur unitaire. On pose φ_α : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + \alpha\langle a|x\rangle a \end{array}\right.$.
1. Vérifier que φ_α est linéaire et donner ses éléments propres.
2. Vérifier que pour $x, y \in E$, $\langle \varphi_\alpha(x)|y\rangle = \langle x|\varphi_\alpha(y)\rangle$. Traduire ceci en terme de matrices dans une base orthonormée de E.
3. Peut-on avoir $\varphi_\alpha \in O(E)$? Caractériser géométriquement φ_α dans ce cas.

II Exercices d'approfondissement

Exercice 9
Soit E un espace euclidien de dimension n rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}$, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de E.
1. Montrer que la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ relativement à la base $\mathcal{B}$, est $U\,{}^tU$, où U est la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ relativement à $\mathcal{B}$.
2. En déduire la matrice de la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.

Exercice 10
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \pi]$. On le munit du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est une famille libre de E.
2. Construire une orthonormalisée de cette famille par la méthode de Schmidt.

3. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^\pi (a\cos t + b\sin t - t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11
Calculer $m = \displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}(t^2-at-b)^2e^{-t}\mathrm{d}t$.

Indication : On rappelle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\mathrm{d}t = n!$ et on pourra considérer l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}[X]$ et l'application $\varphi : (f,g)\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12
Soient U un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $A = I_n - 2U{}^t\!U$.

Montrer que A est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

Exercice 13
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et $\overrightarrow{p}$ un vecteur unitaire de E. Soit

$$f : E\to E,\ \overrightarrow{u}\mapsto \overrightarrow{p}\wedge(\overrightarrow{p}\wedge\overrightarrow{u}).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Déterminer les éléments propres de f.
4. Interpréter géométriquement f.

Exercice 14
Soit $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice orthogonale. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}\right|\le n$.

(on pourra écrire a_{ij} comme produit scalaire)

Exercice 15
Soit $M\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs tels que : $M = OT$