Table des matières

I Equations scalaires

I.1 Equations d'ordre 1

Définition 1
On appelle équation différentielle linaire du premier ordre une équation de la forme

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

avec a, b des fonctions définies sur un intervalle I. L'équation homogène associée à E est

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_H}$$

On appelle solution de E toute **fonction** dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées *courbes intégrales* de l'équation.

Le problème consistant trouver une solution de E vérifiant en plus une condition du type $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$ et $y_o \in \mathbb{K}$) est appel un problème de Cauchy . On parle de condition initiale.

Théorème 1 (Résolution de l'équation homogène)
Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une **primitive** de a sur I. Pour une fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ les assertions suivantes sont équivalentes

1. E_H $\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{K} \ \forall t \in I \ y(t) = \lambda e^{-A(t)}$.

Ainsi, à chaque scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ correspond exactement une fonction solution y et on remarque que toutes les fonctions solutions sont proportionnelles.

Si de plus on donne $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ pour transformer cette équation en problème de Cauchy en lui adjoignant la condition $y(t_0) = y_0$, alors ce problème de Cauchy possède une unique solution.

Théorème 2 (Cauchy)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Etant donné $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution (sur I) y de l'équation différentielle E qui vérifie $y(x_0) = y_0$.

Proposition 1
L'ensemble des solutions de E sur I est un espace affine de dimension 1, c'est à dire que toute solution y est de la forme $y_p + y_H$ où y_p est l'une des solutions de E (appelée solution particulière) et y_H est une solution quelconque de E_H.

Méthode 1

Pour résoudre une équation du type $y' + ay = b$:

1. On commence par résoudre l'équation homogène associe : $y' + ay = 0$, ce qui se fait par un premier calcul de primitive.
2. On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre. Soit il y en a une évident, soit via la méthode de variation de la constante. Ceci nécessite un deuxième calcul de primitive.

   On peut également utiliser le principe de superposition pour chercher deux (ou plus) solutions particulières à des équations de second membre plus simple
3. On explicite clairement l'ensemble des solutions demandé (problème de Cauchy, solutions ayant telle ou telle propriété...)

I.2 Equation d'ordre 2

I.2.1 Rappels sur les équations à coefficients constants

On considère l'équation (E_H) sur $\mathbb{R}$: $ay'' + by' + cy = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$.
L'équation caractéristique associée est $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Théorème 3 (Résolution de l'équation homogène, cas complexe)
On considère $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs complexes**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right.$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{array} \right.$$

Si de plus on se donne $t_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{C}$, alors il existe une unique solution y de l'équation différentielle homogène qui vérifie $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.

Théorème 4 (Résolution de l'équation homogène, cas réels)
On considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs réelles**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{R}$, alors les solutions à valeurs réelles de (E_H)) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$
2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$
3. Si l'équation possède deux solutions non réelles, qui sont donc complexes conjuguées et notée $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, un problème de Cauchy réel possède une unique solution.

Théorème 5

1. Soient $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy (sur I)
$$\left\{ \begin{array}{rcl} ay'' + by' + cy & = & d \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_0' \end{array} \right.$$
admet une unique solution.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et soit $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Alors l'équation différentielle linaire
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$
admet au moins une solution y_p sur I, et l'ensemble de ses solutions est $y_p + \mathcal{S}_0$ où $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée

Proposition 2 (Principe de superposition)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifient $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$ et $ay_2'' + by_2' + cy = f_2$. Alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cb = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

Méthode 2

Quand le second membre est de la forme $Ae^{\alpha t}$ avec $A, \alpha \in \mathbb{C}$ des constantes, on cherche y_p sous la forme $P(t)e^{\alpha t}$ où P est :

1. K une constante si α n'est pas solution de l 'équation caractéristique.
2. $t \mapsto Kt$ si α est une racine de l'équation caractéristique (ie $e^{\alpha t}$ est l'une des solution de l'équation homogène)
3. $t \mapsto Kt^2$ si α est une racine double de l'équation caractéristique.

Dans tous les cas, il faut déterminer la constante K

I.3 Ordre 2, coefficients non constants

Théorème 6 (Cauchy-Lipschitz)
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soient également $t_0 \in I$, $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$
possède une unique solution $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ définie sur I.

Théorème 7
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. L'ensemble des solutions sur I de l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ est un espace affine de dimension 2. Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Plus précisément, les solutions de (E_H) $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sont de la forme $t \mapsto \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$ où y_1, y_2 sont solutions de (E_H) et non proportionnelles et toute solution de (E) est de la forme $y_p + y_H$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_H une solution quelconque de (E_H).

II Systèmes différentiels linéaires

II.1 Cauchy-Lipschitz

Définition 2
Soit $Y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}^n)$ une fonction à valeurs vectorielles. On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Soient également $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Le système d'équations différentielles $Y' = AY + B$ est appelé un système différentiel linéaire à n équations et n inconnues, à coefficients constants.
2. Le système homogène associé est $Y' = AY$.

3. Résoudre un tel système, c'est trouver toutes les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ le vérifiant.
4. Soit $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{K}^n$. On appelle problème de Cauchy (en (t_0, Y_0)) le système $\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$

Théorème 8
Avec les notations de la définition, un problème de Cauchy possède une unique solution.

Les hypothèses sont : $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, I est un intervalle infini et $t_0 \in I$.

Théorème 9
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (H) le système différentiel $Y' = AY$. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n.

Si $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, l'ensemble des solution de $Y' = AY + B$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_H$, c'est à dire que les solutions sont de la même forme que pour les équations scalaires précédentes.

II.2 Cas A diagonalisable

Proposition 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathbb{K}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et $V_1, \ldots, V_n$ des vecteurs propres associés, qui forment une base de $\mathbb{K}^n$.

Alors l'ensemble des solutions de $Y' = AY$ est Vect$(t \mapsto e^{\lambda_1 t}V_1, \ldots, e^{\lambda_2 t}V_2)$.

II.3 Lien avec les équations scalaires à coefficient constant