Table des matières

I Equations scalaires

Rappel : il s'agit de trouver toutes les FONCTIONS qui vérifient une certaine relation sur un intervalle donné

I.1 Equations d'ordre 1

I.1.1 Définition

On appelle équation différentielle linaire du premier ordre une équation de la forme

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

avec a, b des fonctions définies sur un intervalle I. L'équation homogène associée à E est

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_H}$$

On appelle solution de E toute **fonction** dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées *courbes intégrales* de l'équation.

Le problème consistant trouver une solution de E vérifiant en plus une condition du type $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$ et $y_o \in \mathbb{K}$) est appel un problème de Cauchy . On parle de condition initiale.

I.1.2 Notation

On omet parfois de préciser l'intervalle dans l'écriture de l'équation, voire la variable. Dans ce cas l'intervalle est précisé une fois pour toute.

Par exemple, résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - 2y = 0$.

I.1.3 Théorème (Résolution de l'équation homogène)

Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une **primitive** de a sur I. Pour une fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ les assertions suivantes sont équivalentes

1. E_H $\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{K} \ \forall t \in I \ y(t) = \lambda e^{-A(t)}$.

Ainsi, à chaque scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ correspond exactement une fonction solution y et on remarque que toutes les fonctions solutions sont proportionnelles.

Si de plus on donne $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ pour transformer cette équation en problème de Cauchy en lui adjoignant la condition $y(t_0) = y_0$, alors ce problème de Cauchy possède une unique solution.

I.1.4 Théorème (Cauchy)

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Etant donné $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution (sur I) y de l'équation différentielle E qui vérifie $y(x_0) = y_0$.

I.1.5 Proposition

L'ensemble des solutions de E sur I est un espace affine de dimension 1, c'est à dire que toute solution y est de la forme $y_p + y_H$ où y_p est l'une des solutions de E (appelée solution particulière) et y_H est une solution quelconque de E_H.

I.1.6 Sur les courbes intégrales

Soient y_1 et y_2 des solutions de E. Pour $t_0 \in I$ quelconque, si $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ alors y_1 et y_2 sont solutions d'un même problème de Cauchy et donc sont égales.

Ainsi deux solutions d'une même équation différentielle linéaire sont soient égales, soit leur courbes représentatives ne se coupent pas.

I.1.7 Méthode

Pour résoudre une équation du type $y' + ay = b$:

1. On commence par résoudre l'équation homogène associe : $y' + ay = 0$, ce qui se fait par un premier calcul de primitive.
2. On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre. Soit il y en a une évident, soit via la méthode de variation de la constante. Ceci nécessite un deuxième calcul de primitive.
3. On explicite clairement l'ensemble des solutions demandé (problème de Cauchy, solutions ayant telle ou telle propriété...)

I.1.8 Exemple
Résolvons l'équation $(E) : ty' + y = t^2$ sur $\mathbb{R}$.

On a ici un problème, car le coefficient de y s'annule.

- On se place sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. L'équation devient $y' + \frac{1}{t}y = t$ et l'équation homogène a pour solution toutes les fonctions de la forme $y : t \mapsto \frac{\lambda}{t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est quelconque.
- On applique la méthode de variation de la constante. On cherche une solution sous la forme $y : t \mapsto \frac{\lambda(t)}{t} = \lambda(t)f(t)$ où $\lambda \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $t : t \mapsto \frac{1}{t}$ est une solution de l'équation homogène.
  Alors, pour tout $t \in I$, $\lambda'(t)f(t) + \lambda(t)f'(t) + \frac{1}{t}f(t) = t \iff \lambda'(t)f(t) = t \iff \lambda'(t) = t^2$.
  On prend $\lambda : t \mapsto \frac{t^3}{3}$ et $yt \mapsto \frac{t^2}{3}$ est une solution particulière de E sur I
- Raccordement. Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors elle vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
  Ainsi $y : t \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda_1}{t} + \frac{t^2}{3} & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda_2}{t} + \frac{t^2}{3} & \text{si } t > 0 \end{cases}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
  La seule possibilité pour pouvoir prolonger y par continuité en 0 et alors de prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
  Ainsi, la seule solution possible de (E) sur $\mathbb{R}$ est $y : t \mapsto \frac{t^2}{3}$.
- Réciproquement (attention, ne pas oublier la synthèse !), $t \mapsto \frac{t^2}{3}$ est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (par un calcul facile).

I.2 Equation d'ordre 2

I.2.1 Rappels sur les équations à coefficients constants

On considère l'équation (E_H) sur $\mathbb{R}$: $ay'' + by' + cy = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$.
L'équation caractéristique associée est $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

I.2.2 Théorème (Résolution de l'équation homogène, cas complexe)
On considère $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs complexes**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que
$$y : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right.$$
2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que
$$y : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{array} \right.$$

Si de plus on se donne $t_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{C}$, alors il existe une unique solution y de l'équation différentielle homogène qui vérifie $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.

I.2.3 Théorème (Résolution de l'équation homogène, cas réels)
On considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs réelles**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{R}$, alors les solutions à valeurs réelles de (E_H)) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$
2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$
3. Si l'équation possède deux solutions non réelles, qui sont donc complexes conjuguées et notée $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, un problème de Cauchy réel possède une unique solution.

I.2.4 Théorème

1. Soient $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy (sur I)
$$\left\{\begin{array}{rcl} ay'' + by' + cy &=& d \\ y(x_0) &=& y_0 \\ y'(x_0) &=& y_0' \end{array}\right.$$
admet une unique solution.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et soit $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Alors l'équation différentielle linaire
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$
admet au moins une solution y_p sur I, et l'ensemble de ses solutions est $y_p + \mathcal{S}_0$ où $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée

I.2.5 Proposition (Principe de superposition)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifient $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$ et $ay_2'' + by_2' + cy = f_2$. Alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cb = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

I.2.6 Méthode

Le second membre est de la forme $Ae^{\alpha t}$ avec $A, \alpha \in \mathbb{C}$ des constantes. On cherche y_p sous la forme $P(t)e^{\alpha t}$ où P est :

1. K une constante si α n'est pas solution de l 'équation caractéristique.
2. $t \mapsto Kt$ si α est une racine de l'équation caractéristique (ie $e^{\alpha t}$ est l'une des solution de l'équation homogène)
3. $t \mapsto Kt^2$ si α est une racine double de l'équation caractéristique.

Dans tous les cas, il faut déterminer la constante K

I.2.7 Exemple
Résoudre $y'' + y = \cos(x)$.

I.3 Ordre 2, coefficients non constants

I.3.1 Théorème (Cauchy-Lipschitz)
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soient également $t_0 \in I$, $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$ possède une unique solution $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ définie sur I.

Preuve.
Admis ! ■

I.3.2 Théorème
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. L'ensemble des solutions sur I de l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ est un espace affine de dimension 2. Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Plus précisément, les solutions de (E_H) $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sont de la forme $t \mapsto \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$ où y_1, y_2 sont solutions de (E_H) et non proportionnelles et toute solution de (E) est de la forme $y_p + y_H$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_H une solution quelconque de (E_H).

Preuve.
Le théorème précédent nous assure l'existence de y_p qui est une solution particulière de (E) (il suffit de choisir une condition particulière).

Notons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_H) et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

Posons $\varphi : \left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^I \\ y & \mapsto & y'' + ay' + by \end{array}\right.$ qui est facilement linéaire. Alors $\mathcal{S}_0 = \ker(\varphi)$.

Alors pour $t_0 \in I$, $\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_0 & \to & \mathbb{K}^2 \\ y & \mapsto & \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \end{array}\right.$ est linéaire ($\mathcal{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-ev, voir le cours de sup) et bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. ce qui conclut sur la dimension de $\mathcal{S}_0$.

Soit maintenant $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$. Alors $y \in \mathcal{S} \iff \varphi(y) = \varphi(y_p) \iff \varphi(y - y_p) = 0 \iff y - y_p \in \mathcal{S}_0$ ce qui prouve bien que $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$ (plan affine). ■

I.3.3 Principe de superposition

Il reste bien évidemment valable, même quand les coefficients ne sont pas constants.

I.3.4 Méthode de résolution

Il n'y a pas de méthode générale ! On ne connaît que la forme des solutions, ainsi que la structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. En général, l'exercice propose une méthode pour trouver au moins une solution de l'équation homogène.

I.3.5 Recherche d'une solution DSE

Toujours en deux phases :

1. Analyse : on suppose qu'il existe une solution DSE de rayon $R > 0$ et on trouve une relation sur les coefficients, que l'on résout.
2. Synthèse : on montre que la ou les fonctions trouvées sont solution. Soit en reconnaissant le DSE (fonction usuelle), soit en prouvant que le rayon de convergence trouvé est > 0. Il reste à vérifier (automatique normalement), que la fonction ainsi définie est bien solution, sur un intervalle que l'on précisera bien.

Résolvons sur des intervalles le plus grand possible $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$ (E).

On cherche une solution y sous la forme $y : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, ie y est la somme d'une série entière sur un intervalle $]-r, r[$ pour $r > 0$.

Alors, pour $t \in]-r, r[$, $y'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$ et $y''(t) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

y est solution de (E) ssi

$$\begin{aligned}
&t^2(1-t)y''(t) - t(1+t)y'(t) + y(t) = 0\\
\iff& \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0\\
\iff& \sum_{n=2}^{+\infty} (-n(n-1) - n)a_n t^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1) - n + 1)a_n t^n - a_1 t - a_1 t^2 + a_0 + a_1 t = 0\\
\iff& -\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 a_n t^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 a_n t^n - a_1 t^2 + a_0 = 0\\
\iff& -\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)^2 a_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 a_n t^n - a_1 t^2 + a_0 = 0\\
\iff& \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) t^n + a_2 t_2 - a_1 t^2 + a_0 = 0
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficient d'un DSE de rayon non nul, $a_0 = 0$, $a_1 = a_2$ et $\forall n \geqslant 3$ $(n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0$ donc $\forall n \geqslant 2 a_n = a_{n-1}$.

Finalement, $a_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1 a_n = a_1$ donc $y(t) = a_0 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} t^n = a_0 t \sum\limits_{n=1}^{+\infty} t^n - 1 = \frac{a_0 t}{1-t}$.

Synthèse : le rayon de convergence de la série trouvé étant égal à 1, l'unicité est valable et donc $y : t \mapsto \frac{a_0 t}{1-t}$ est solution de (E) sur $]-1, 1[$ pour toute valeur de a_0. C'est mieux que ce à quoi on pouvait s'attendre, vu que le coefficient de y'' s'annule en 1 et 0.

Il nous manque une solution de cette équation homogène.

I.3.6 Trouver une deuxième solution

On reprend le cas général : $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ sur l'intervalle I.

Si on connaît une solution y_0 de (E) sur I qui ne s'annule pas, alors on fait un changement de fonction inconnue, $\lambda = \frac{y}{y_0}$ ie on cherche une autre solution y sous la forme $y = \lambda y_0$ où $\lambda \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ est notre inconnue.

En replaçant dans l'équation, le terme en λ disparaît toujours.

I.3.7 Exemple

ON reprend $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$ (E) avec $y_0 : t \mapsto \frac{t}{1-t}$. On cherche y sous la forme $y = \lambda y_0$ sur l'intervalle $]0, 1[$ (pour l'instant).

Alors y est solution de (E) ssi $t^2(1-t)(\lambda'' y_0 + 2\lambda' y_0' + \lambda y_0'') - t(1+t)(\lambda' y_0 + \lambda y_0') + \lambda y_0 = 0$ ssi $t^2(1-t)\lambda'' y_0 + \lambda'(2t^2(1-t)y_0' - t(1+t)y_0) = 0$

Or $t^2(1-t)y_0 = t^3$ et $2t^2(1-t)y_0'(t) - t(1+t)y_0(t) = 2t^2 \frac{1-t+t}{(1-t)} - \frac{t^2(1+t)}{1-t} = t^2 \frac{1-t}{1-t} = t^2$.

Ainsi λ vérifie $\lambda'' + \frac{1}{t}\lambda' = 0$ et donc $\lambda'(t) = C_1 \frac{1}{t}$ et $\lambda(t) = C_1 \ln|t| + C_2$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de (E) sur $]0, 1[$ sont de la forme $y : t \mapsto C_1 \frac{t \ln(t)}{1-t} + C_2 \frac{t}{1-t} = \frac{t}{1-t}(C_1 \ln(t) + C_2)$.

Le calcul de vérification montre que $y : t \mapsto \frac{t}{1-t}(C_1 \ln|1| + C_2)$ est solution sur les intervalles $]-\infty, 0[,]0, 1[,]1, +\infty[$.

II Systèmes différentiels linéaires

II.1 Cauchy-Lipschitz

II.1.1 Définition
Soit $Y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}^n)$ une fonction à valeurs vectorielles. On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Soient également $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Le système d'équations différentielles $Y' = AY + B$ est appelé un système différentiel linéaire à n équations et n inconnues, à coefficients constants.
2. Le système homogène associé est $Y' = AY$.
3. Résoudre un tel système, c'est trouver toutes les fonctions $y_1, \dots, y_n$ le vérifiant.
4. Soit $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{K}^n$. On appelle problème de Cauchy (en (t_0, Y_0)) le système $\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$

II.1.2 Exemple
Dans le cas $n = 2$, un tel système peut être $\begin{cases} y_1' = 2y_2 + y_2 + e^t \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + \sin(t) \end{cases}$.

II.1.3 Théorème
Avec les notations de la définition, un problème de Cauchy possède une unique solution.

Les hypothèses sont $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, I est un intervalle infini et $t_0 \in I$.

Preuve.
Admis ∎

II.1.4 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (H) le système différentiel $Y' = AY$. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n.

Si $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, l'ensemble des solution de $Y' = AY + B$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_H$, c'est à dire que les solutions sont de la même forme que pour les équations scalaires précédentes.

Preuve.
Comme pour l'ordre 2 scalaire, on construit une bijection linéaire entre $\mathcal{S}_H$ et $\mathbb{K}^n$ grâce au théorème II.1.3 ∎

II.2 Cas A diagonalisable

II.2.1 Résolution

Résolvons $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ peut s'écrire $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a maintenant $Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$. Si on pose $X = P^{-1}Y$ (ie $Y = PX$), alors le système différentiel devient $Y' = DY$ (la multiplication par la matrice P^{-1} consiste en des sommes et des produits par des constantes donc $P^{-1}Y' = (P^{-1}Y)'$ par linéarité de la dérivation).

En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ on obtient $\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$ que l'on sait résoudre. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 : t \mapsto ae^{3t}$ et $x_2 : t \mapsto be^t$.

Or $Y = PX = P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Ainsi $Y : t \mapsto a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ e \end{pmatrix}^{3t} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ e \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} ae^{3t} - be^t \\ ae^{3t} + be^t \end{pmatrix}$.

II.2.2 Remarque importante

Nous n'avons pas eu besoin du calcul de P^{-1}. La méthode précédente est à retenir, surtout le passage de Y à X.

II.2.3 Proposition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathbb{K}$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres et $V_1, \dots, V_n$ des vecteurs propres associés, qui forment une base de $\mathbb{K}^n$.

Alors l'ensemble des solutions de $Y' = AY$ est $\text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_1 t}V_1, \dots, e^{\lambda_2 t}V_2)$.

Preuve.
C'est une généralisation facile de l'exemple précédent. ∎

II.2.4 Matrice réelle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans ce cas, on obtient dans le théorème précédent, des expressions de la forme $e^{\lambda t}V$ et $e^{\overline{\lambda} t}\overline{V}$. On admet que l'on peut les remplacer par $\Re(e^{\lambda t}V)$ et $\Im(e^{\lambda t}V)$.

II.2.5 Exemple
Traiter le cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

II.2.6 Limite et parties réelles des valeurs propres

Notez que l'exponentielle réelle qui apparaît est de la forme $e^{\Re(\lambda)\cdot}$. A quelle condition peut-on dire que toutes les solutions Y vérifient $Y(t) \underset{t\to+\infty}{\to} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$?

II.2.7 Cas A trigonalisable

On peut faire un résolution de proche en proche. Chaque ligne devient une équation scalaire d'ordre 1 à résoudre.

II.2.8 Second membre

Si le système est de la forme $Y' = AY + B$ avec B continue, on reprend les notations de l'exemple. On trouve $X' = DX + P^{-1}B$ et il faut calculer P^{-1} pour trouver X avant de calculer Y.

II.3 Lien avec les équations scalaires à coefficient constant

II.3.1 Transformation du problème

On souhaite résoudre $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$. On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ et l'équation devient $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} Y$.

II.3.2 Equation caractéristique

D'après le cours sur les matrices compagnons, le polynôme caractéristique, dans le cas général, est directement lisible sur l'équation, comme pour l'ordre 2.

Plus précisément, si on veut résoudre $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{-i)} = 0$, le polynôme caractéristique de la matrice obtenu est $X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. On retrouve bien le résultat connu quand $n = 2$.