Exercice 1

Partie I

1. D'après le cours de sup $r_1r_2 = c$ et $r_1 + r_2 = -b$.
2. On pose $f : t \mapsto e^{r_it}$ pour $i \in \{1,2\}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ (attention ici à ne pas mélanger fonctions et nombres)
$$f''(t) + bf'(t) + cf(t) = (r_i^2 + br_i + c)f(t) = 0$$
car $r_i^2 + br_i + c = 0$ par définition.
Ainsi $t \mapsto e^{r_it}$ est bien solution de (E_H) sur $\mathbb{R}$ (le $\mathbb{R}$ où on a posé t).
3. Soit y une solution de (E_H) sur $\mathbb{R}$ (ne pas oublier de bien préciser qui est le y que vous manipulez).
Alors $(y' - r_1y)' - r_2(y' - r_1y) = y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1r_2y = 0$ car y est solution de (E_H).
4. Soit y une solution de (E_H). On pose $g_1 : t \mapsto y'(t) - r_1y(t)$ et $g_2 : t \mapsto y'(t) - r_2y(t)$.
D'après la question précédente, g_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle d'ordre 1 (homogène) $f' - r_2f = 0$ (d'inconnue f). D'après le cours, il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que $g_1t \mapsto C_2e^{r_2t}$.
En échangeant r_1 et r_2 dans la question précédente (ce qui ne change ni leur somme ni leur produit), il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que $g_2 : t \mapsto C_1e^{r_1t}$.
5. Soit y une solution de (E_H). Alors pour $t \in \mathbb{R}$ on a $y'(t) - r_1y(t) = C_2e^{r_2t}$ et $y'(t) - r_2y(t) = C_1e^{r_1t}$.
Par différence, et en divisant par $r_2 - r_1 \neq 0$, $y(t) = \lambda e^{r_1t} + \mu e^{r_2t}$ où $\lambda = \frac{c_1}{r_1 - r_2}$ et $\mu = \frac{C_2}{r_2 - r_1}$ sont bien des réels indépendants de t.
6. Le but de cette question était subtil. Dans la question précédente, on ne montre pas que TOUTES les fonction de la forme donnée sont bien solution de (E_H) (les questions sont toutes de la forme y solution $\Rightarrow$ ..., et on a jamais la réciproque)
   (a) On montre facilement que si $f, g \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors $D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$.
   (b) $F = \ker(D)$ par définition donc est un sous-espace de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (comme tout noyau qui se respecte).
   (c) On a déjà F qui est inclus dans l'ensemble donné qui est $\mathrm{Vect}(f_1 : t \mapsto e^{r_1t}, f_2 : t \mapsto e^{r_2,t})$. Or $f_1, f_2 \in F$ d'après la question 2 (qui sinon a un but beaucoup plus subtil : montrer que l'on peut poser y une solution de (E_H)). Comme F est un espace vectoriel, $\mathrm{Vect}(f_1, f_1) \subset F$ et finalement on a bien l'égalité demandée.
   (d) Il s'agit (notation de la question précédente) de savoir si (f_1, f_2) est libre ou non (ces fonctions étant clairement non nulle, on a déjà $\dim(F) \geqslant 1$). Il y a beaucoup de méthodes possibles pour montrer que cette famille est libre.
      — Posons $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ (la fonction nulle). Alors, en évaluant en 0 et en 1 (par exemple) on trouve un système à 2 équations et 2 inconnues (λ et μ) dont la seule solution est 0.
      — On suppose $r_1 < r_2$ (qui a échanger les fonctions). Alors $\forall t \in \mathbb{R} \lambda e^{(r_1 - r_2)t} + \mu = 0$ et en faisant tendre t vers $+\infty$ on trouve $\mu = 0$ puis $\lambda = 0$.
      — On a $f_1(t) = 1 + r_1t + o_0(t)$ et $f_2(t) = 1 + r_2t + o_0(t)$ Si $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ alors $(\lambda + \mu) + (\lambda r_1 + \mu r_2)t + o_0(t) = 0$ et on obtient encore 2 équations par unicité des coefficients d'un DL.
      — Plus évolué. f_1 est un vecteur propre de l'application linéaire $d : f \mapsto f'$ associée à r_1 et f_2 est un vecteur propre associé à r_2. Comme $r_1 \neq r_2$, (f_1, f_2) est libre.

      Dans tous les cas $\dim(F) = 2$.
7. (a) On demandait un ENSEMBLE, et pas la forme des solutions. $\{t \mapsto \lambda e^{4t} + \mu e^{-4t} |\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ était une écriture convenable.
   (b) D'après le cours, un problème de Cauchy possède une unique solution. On trouve les seules valeurs de λ et μ en remplaçant y par $\lambda f_1 + \mu f_2$ dans les équations des conditions initiales.

Partie II

1. On trouvait "l'intérieur" d'une parabole d'axe (Ox).
2. Délicat à rédiger. Premièrement, pour $(u, v) \in \Delta$, $h(u, v) = (\frac{u^2+v^2}{2}, v)$ est bien dans D car $2\frac{u^2+v^2}{2} - (v)^2 = u^2 > 0$. (étape indispensable, sinon on prouve en fait qu'un partie de Δ, non connue, est en bijection avec D).
Soit $(x, y) \in D$. Montrons qu'il existe un unique $(u, v) \in \Delta$ tel que $h(u, v) = (x, y)$. On résout donc $h(u, v) = (x, y)$ pour $(x, y) \in D$ fixé et d'inconnue $(u, v) \in \Delta$. Comme $y^2 < 2x$, on a bien $u = +\sqrt{2x - y^2}$ (on cherche $u > 0$) et $v = y \in \mathbb{R}$.
Alors $h^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \Delta \\ (x, y) & \mapsto & (\sqrt{2x - y^2}, y) \end{array} \right.$.
h est $\mathcal{C}^1$ sur Δ sans difficulté. Par contre, il faut bien préciser que pour $(x, y) \in D$, $2x - y^2 > 0$ et donc h^{-1} est $\mathcal{C}^1$ par composition d'une fonction strictement positive et $\mathcal{C}^1$ et de la fonction racine carrée.

3. Le même argument montre que $\psi = \varphi \circ h$ est $\mathcal{C}^2$ par composition. Soit $(u, v) \in \Delta$. $\psi(u, v) = \varphi(\frac{u^2+v^2}{2}, v)$. On pose $(x, y) = h(u, v)$. En notant $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ la dérivée partielle par rapport à la première variable de la fonction φ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = u\frac{\partial \varphi}{\partial x}(h(u, v)) + 0$$

et donc $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(h(u, v)) + u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(h(u, v))$.
Finalement, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(u, v) - 16\psi(u, v) = 0 \iff \frac{\partial \varphi}{\partial x}(h(u, v)) + u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(h(u, v)) - 16\varphi(h(u, v)) = 0$. Avec les notations $(x, y) = h(u, v)$ et sachant que h est bijective,

$$\forall (u, v) \in \Delta \ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(u, v) - 16\psi(u, v) = 0 \iff \forall (x, y) \in D \ (2x - y^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - 16\varphi(x, y) = 0$$

ie ψ est solution de (E') sur Δ si et seulement si φ est solution de (E) sur D.

4. D'après 7a, si on fixe $v \in \mathbb{R}$ la fonction $\psi_v : u \mapsto \psi(u, v)$ est de la forme $\psi_v : u \mapsto \lambda e^{4u} + \mu e^{-4u}$.
A priori λ et μ dépendent de la valeur de v donc $\psi : (u, v) \mapsto \lambda(v)e^{4u} + \mu(v)e^{-4u}$ où $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On a maintenant envie de prouver que λ, μ sont de classe $\mathcal{C}^2$ (pour pouvoir vérifier que toutes les fonctions de la forme précédentes sont solutions, voir la partie I). On sait que $v \mapsto \psi(1, v)$ est $\mathcal{C}^2$ et $v \mapsto \psi(2, v)$ aussi. On peut alors isoler $\lambda(v)$ et $\mu(v)$ comme combinaison linéaire de ces fonctions $\mathcal{C}^2$ donc λ, μ sont bien des fonctions $\mathcal{C}^2$.
La vérification du fait que $(u, v) \mapsto \lambda(v)e^{4u} + \mu(v)e^{-4u}$ avec $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ quelconques est bien solution de (E') est immédiate.

5. Il suffisant de remplacer u, v par leurs expressions en fonction de x, y, c'est à dire exprimer $\varphi = \psi \circ h^{-1}$.