Concours blanc : Math A

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice à coefficients réels, on note $a_{i,j}$ le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j. On a alors $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Pour $j \in [\![1,p]\!]$, on note $C_j(A)$ la $j$ième colonne de A.

Dans le cas où V est une matrice colonne (cas $p = 1$), on note plus simplement $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Partie I : un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}$. On pose $A_0 = U_0{}^tV_0$

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. Calculer A_0U_0.
3. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A_0 = PDP^{-1}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.
6. Donner un interprétation géométrique de ce résultat pour $n = 2$.

Partie II : caractérisation des matrices de rang 1

Soit U, V deux matrices colonnes non nulles de $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Déterminer la taille et les coefficients de U^tV en fonction des u_i et v_j pour $i, j \in [\![1,n]\!]$.
   (b) Calculer le rang de U^tV.
   (c) Calculer $\mathrm{tr}(U^tV)$. Donner une interprétation géométrique de $\mathrm{tr}(U^tV) = 0$.
2. On pose maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que
   $$\forall j \in [\![1,n]\!] \exists \alpha_j \in \mathbb{R}\ C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$$
   (b) Montrer qu'il existe deux colonnes $X, Y \in \mathbb{R}^n$ telles que $A = X^tY$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{rg}(M) = 1$.

Partie III : une application en probabilité

On considère deux variables aléatoires X, Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$. On suppose de plus que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $m_{i,j} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$ et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

On pose de plus les colonnes $U_X = (\mathbb{P}(X = i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $U_Y = (\mathbb{P}(Y = i))_{1\leqslant i\leqslant n}$.

1. On suppose dans cette question que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer $U_X{}^tU_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.
2. On suppose dans cette question que M est de rang 1.
   (a) Montrer que $\sum_{j=1}^{n} C_j(M) = U_X$.
   (b) En déduire que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ il existe un $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.
   (c) Montrer que $\forall j \in [\![1,n]\!]\ \mathbb{P}(Y = j) = \beta_j$.
   (d) En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 2
Partie 0 : question préliminaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que

$$f \circ g = g \circ f$$

Soit λ une valeur propre de f, $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé. Montrer que le sous-espace $E_\lambda(f)$ est stable par g c'est à dire

$$\forall x \in E_\lambda(f)\ g(x) \in E_\lambda(f).$$

Partie I

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f et g commutent.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f et g.
   Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?
3. On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. En utilisant la question préliminaire, déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ soit stable par f et g.
4. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

Partie II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f.
2. Soient $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$. On considère le polynôme P défini par

   $$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

   Soit u l'endomorphisme de E défini par

   $$u = P(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i$$

   avec $f^0 = Id$ l'application identité de E, et pour $k \geqslant 1$, $f^k = f \circ \cdots \circ f$ est la k-ième composée de f.
   (a) Montrer que f et u commutent.
   (b) Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.
3. On suppose dans cette question uniquement que $E = \mathbb{C}^5$. On note I_5 la matrice identité d'ordre 5. Soit

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer les valeurs propres (éventuellement complexes) de A.
   (b) Trouver 5 nombres réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 tels que

   $$B = a_0 I_5 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4.$$

   (c) En déduire les valeurs propres (éventuellement complexes) de B.
4. On revient à un espace général E. Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.
   (a) Quelle est la dimension de E_{λ_i}, le sous-esapce propre de f associé à la valeur propre λ_i ?

(b) En déduire, en se servant également de la question préliminaire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.

(c) g est-il diagonalisable ?

(d) On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré strictement inférieur à n et on considère l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{C}^n \\ P & \mapsto & (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) \end{array} \right.$$

i. Vérifier que l'application φ est linéaire.

ii. Vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.

iii. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} P(\lambda_i) = \mu_i$$

(e) Déduire des questions précédente qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $g = P(f)$.

5. On considère la matrice $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Déterminer une matrice Q telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale.

(b) Vérifier que les colonnes de Q forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ et proposer une valeur de Q telle que la base des colonnes soit orthonormale.

(c) On cherche une matrice N telle que $N^2 = M$. Montrer en utilisant la question 4 que si une telle matrice N existe alors

— $Q^{-1}NQ$ est diagonale.

— Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$N = \alpha I_2 + \beta M$$

où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.

(d) Déterminer toutes les matrices N vérifiant $N^2 = M$.