Exercice 1

Partie I

1. On a déjà $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$. Clairement $rg(A_3) = 1$ et donc 0 est valeur propre de A_0. L'espace propre associé est $\ker(A_0) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ (la famille est libre par construction via l'algorithme de Gauss).
2. Faisons les malins : $A_0U_0 = U_0{}^tV_0U_0 = U_0(V_0|U_0)$ (ps. canonique). Donc $AU_0 = U_0$.
3. Le calcul précédent montre que U_0 est un vecteur propre (il est non nul) associé à la valeur propre 1. Ainsi il existe une base constituée de vecteur propres et A_0 est diagonalisable.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteur propre que nous avons exhibée.

   Alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est bien diagonale.
5. Pour $n = 0$ on a $A^n = I_4$ et pour $n > 0$, on remarque que $D^n = D$ donc $A^n = PD^nP^{-1} = A$.
6. EN particulier pour $n = 2$, on a $A^2 = A$ donc A est la matrice dans la base canonique de la projection par rapport à $\ker(A - I_3) = \text{Vect}(U_0)$ dans la direction $\ker(A)$ qui est l'hyperplan normal à V_0 (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$), ie d'équation $x - y + 2z - t = 0$ (qui est bien l'équation qu'on a résolu pour trouver une base de ce noyau d'ailleurs...).

Partie II : caractérisation des matrices de rang 1

1. (a) U^tV est carrée de taille n et si on note $M = U^tV$ alors $m_{i,j} = u_iv_j$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$.

   (b) L'étudiant attentif (voire avisé) se doute qu'il faut prouver que ce rang vaut 1. Le calcul précédent montre que pour $j \in [\![1, n]\!]$, $C_j(U^tV) = v_jU$ donc toutes les colonnes de $M = U^tV$ sont proportionnelles à U. Ainsi $\text{rg}(M) \leqslant 1$. Comme V est non nulle, il y a au moins un $v_j \neq 0$ et donc $C_j(M) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ (U aussi est non nulle). Finalement $\text{rg}(M) \neq 0$ et donc
   $$\text{rg}(U^tV) = 1$$

   (c) $\text{tr}(U^tV) = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i = (U|V) = {}^tUV$ d'après la question 1 et le cours sur le produit scalaire. Ainsi cette trace est nulle ssi les colonnes U et V sont orthogonales.
2. (a) j_0 correspond à une colonne non nulle de A qui existe car $A \neq 0$. Alors, toutes les colonnes de A sont proportionnelles à C_{j_0}.

   (b) On prend $X = C_{j_0}$ et $Y = (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et les calculs de la question 1.a montrent que $A = X^tY$.
3. $\text{rg}(M) = 1$ ssi il existe deux colonnes non nulles $X, Y \in \mathbb{R}^n$ telles que $M = X^tY$

Partie III : application aux probabilités

1. On a $m_{i,j} = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$ par indépendance, et II.1.a montre que $M = U_X{}^tU_Y$ avec U_X, U_Y non nulles (la somme de leurs coordonnées vaut 1). Ainsi $\text{rg}(M) = 1$.
2. (a) La $i$ème coordonnée de $\sum_{j=1}^{n} C_j(M)$ est $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)$ car les événements $((Y = j))_{j \in [\![1,n]\!]}$ forment un système complet.

   (b) On sait que (notation II.2.a) $C_j(M) = \alpha_jC_{j_0}(M)$ donc $U_X = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right) C_{j_0}$. Comme U_X est non nulle, $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \neq 0$ et on a $C_{j_0}(M) = \frac{1}{\alpha}U_X$ donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $C_j = \frac{\alpha_j}{\alpha}U_X$.

(c) Soit $j \in [\![1, n]\!]$ fixé. On va sommer les coordonnées de $C_j(M)$.

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(Y = j)$$

pour la même raison qu'en III.2.a.

Mais on a prouvé à la question précédent que cette somme est aussi la somme des coordonnées de $\beta_j U_X$ qui vaut β_j car $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i) = 1$. CQFD.

(d) On a $C_j(M) = P(Y = j)U_X$ donc, d'après la partie II, $M = U_X {}^tU_Y$ et M est bien le produit de d'une colonne et d'une ligne non nulles et est donc $\mathrm{rg}(M) = 1$.

Exercice 2

Partie 0 C'est du cours !

Partie I

1. On a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = BA$ donc f et g commutent.
2. On calcule les polynômes caractéristiques. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi_f(\lambda) = \chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$ et $\chi_g(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)^2$

   De plus, $E_1(f) = \{X \in \mathbb{R}^3 |\ AX = X\} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Ainsi A n'est pas diagonalisable (il aurait fallu $E_1(f)$ de dimension 3, ie $f = Id$), mais son polynôme caractéristique étant scindé, elle est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

   $E_0(g) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ et $E_2(g) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Ainsi B n'est pas diagonalisable (il aurait fallu $\dim(E_2(g)) = 2$), mais trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.
3. On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'après les calculs précédents (tout vecteur proportionnel faisant l'affaire). Remarquons que e_1 est un vecteur propre de f pour la valeur propre 1.

   Après moultes réflexions, on se dit que $E_1(f)$ est stable par g donc peut-être que $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ fera l'affaire.

   Evidemment, $f(e_2) = e_2 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

   Nos deux vecteurs conviennent (ils ne sont clairement pas proportionnels).
4. On complète (e_1, e_2) en $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $f(e_1) = e_1$ et $g(e_1) = 2e_1$, les premières colonnes des matrices de f et g dans la base $\mathcal{B}$ ont seulement la première coordonnée non nulle.

   Comme $f(e_2), g(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, les deuxièmes colonnes ont au maximum les deux premières coordonnées non nulles et finalement, quel que soit $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ sont triangulaires supérieures.

   Le fait inhabituel par rapport à la question de trigonalisation, est qu'il s'agit de la même base.

Partie II

1. Chaque valeur propre λ_i donne au moins un vecteur propre e_i et les e_i forment une famille libre d'après le cours. ON en a n, il s'agit donc d'une base.
2. (a) On a $f \circ u = f \circ \sum_{i=0}^{d} a_i f^i = \sum_{i=0}^{d} a_i f^{i+1} = u \circ f$.

   Le développement est licite par linéarité de f et la factorisation de manière générale, par définition d'une combinaison linéaire d'application.

   (b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $u(e_i) = P(\lambda)e_i$ (calcul fait en TD). Donc e_i est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $P(\lambda)$. On dispose ainsi d'une base de vecteurs propres pour u qui est diagonalisable.
3. (a) On se retrousse les manches. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^5 - 1$. Ainsi les valeurs propres de A sont les racines 5ièmes de l'unité, les nombres $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ pour $k \in [\![0, 4]\!]$.

   (b) Encore une fois rien de bien dur mais il faut faire les calculs. $B = 5I_5 + A + 2A^2 + 3A^3 + 4A^4$.

(c) Posons $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ pour $k \in [\![0, 4]\!]$. D'après 2b, les valeures propres de B sont les nombres de la forme $5 + \omega_k + 2\omega_k^2 + 3\omega_k^3 + 4\omega_k^4$.

4. (a) D'après le cours elle vaut au moins 1 (car λ_i est une valeur propre) et au maximum la multiplicité de λ_i en tant que racine de χ_f, c'est à dire au maximum 1. Finalement, $\dim(E_{\lambda_i}) = 1$.

   (b) On a $E_{\lambda_i} = \text{Vect}(e_i)$ (car e_i est non nul donc directeur de la droite E_{λ_i}) et comme $g(e_i) \in E_{\lambda_i}$, $g(e_i) = \mu_i e_i$ pour un certain $\mu_i \in \mathbb{C}$.

   (c) Oui ! Et même dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

   (d) Oh, voici venir les polynômes de Lagrange.

      i. C'est du cours ! Attention à bien poser P, Q deux polynômes, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et calculer proprement $\varphi(\alpha P + \beta Q)$ en replaçant dans l'expression de φ.

      ii. C'est encore du cours. L'argument principal est qu'un polynômes du noyau est de degré $< n$ et possède pourtant n racines au moins donc est nul.

      iii. φ est un isomorphisme car elle est injective entre espaces de même dimension n. Ainsi $P = \varphi^{-1}(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix})$ est le seul polynôme convenable.

   (e) Ecrivons les matrices dans la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \text{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. On pose P comme à la question précédente.
   Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(g)) = \text{diag}(P(\mu_1), \ldots, P(\mu_n)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ d'après la question II.2.b Ainsi on a bien $f = P(g)$.

5. (a) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I_2 - M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\lambda - 5 & 3 \\ 3 & 2\lambda - 5 \end{pmatrix}$ qui est clairement de rang 1 dans les cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 4$ (que l'on peut intuiter grâce à la trace).
   Calculons $E_1(M) = \{X \in \mathbb{R}^2 | \; MX = X\} = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ et $E_4(M) = \{X \in \mathbb{R}^2 | \; MX = 4X\} = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.
   Ainsi $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

   (b) Effectivement, les vecteurs propres trouvés sont orthogonaux. On prend plutôt $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et la famille des colonnes est orthonormée (indirecte).

   (c) N et M commutent car $NM = N^3 = MN$. De plus, M est diagonalisable à valeurs propres de multiplicité 1 donc N est diagonalisable via la même base de vecteur propre que M.
   De plus, $n = 2$ ici donc le polynôme P de la question 4e est de degré au plus 1, ie $N = \alpha I_2 + \beta M$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (et non $\mathbb{C}$ comme en 4, car les espaces considérés sont des espaces réels).

   (d) Réciproquement, on cherche Δ diagonale telle que $\Delta^2 = D = \text{diag}(1, 4)$.
   Les 4 seules matrices diagonales convenables sont $\Delta = \text{diag}(\pm 1, \pm 2)$ et $N = Q\Delta Q^{-1}$ vérifie $N^2 = Q\Delta^2 Q^{-1} = M$. Comme la question précédente prouve que toute les matrices N telle que $N^2 = M$ vérifie $N = Q\Delta Q^{-1}$ où Δ est diagonale de carré D, on a les 4 solutions sous la forme $Q\,\text{diag}(\pm 1, \pm 2)Q^{-1}$. $Q^{-1} = {}^tQ$ et on effectue les calculs. Les 4 valeurs possibles de N sont

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$