Exercice 1

Partie I

1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, G est la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0.

   ON veut montrer qu'il existe une unique primitive F de f sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 F = 0$.

   Supposons qu'une telle primitive $F = G + c$ existe où $c \in \mathbb{R}$. Alors $0 = \int_0^1 G + c$ donc $F = G - \int_0^1 G(t)\mathrm{d}t$.

   Réciproquement, $F = G - \int_0^1 G$ convient.

   Comme toute les primitives de f sont de la forme $G + c$ et qu'il y a une unique valeur de c convenable, on a bien montré l'existence et l'unicité.

2. B_0 est défini par lénoncé.
   Si on a défini B_n pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors B_{n+1} existe et est unique d'après la question 1.
   Finalement, par récurrence, $(B_n)_n$ est bien définie.

3. $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$.

   Ainsi $B_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + c_2$ où $c_2 \in \mathbb{R}$ est à trouver. Comme $\int_0^1 B_2(t)\mathrm{d}t = 0$, on trouve $\frac{1}{6} - \frac{1}{4} = c_2 = 0$ donc $c_2 = \frac{1}{12}$. $B_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$.
   Donc $B_3(X) = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12} + c_3$ avec $\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + c_3 = 0$ donc $c_3 = 0$.
   Finalement $B_4(X) = \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} + c_4$ avec $\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72} + c_4 = 0$ soit encore $\frac{1}{24}(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + c_4 = 0$. $c_4 = -\frac{1}{720}$

4. On montre facilement par récurrence que le degré est n et le coefficient dominant est $\frac{1}{n!}$.

5. Soit $n \geqslant 2$. Alors $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 B_{n-1}(t)\mathrm{d}t = 0$ car $n - 1 > 0$.

   Cette relation est valable pour $n = 0$ mais pas pour $n = 1$.

6. On a bien $C_0 = B_0 = 1$. Pour $n > 0$, $C_n'(X) = (-1)^n \times (-B_n'(1-X)) = (-1)^{n+1} B_{n-1}(1-X) = (-1)^{n-1} B_{n-1}(1-X) = C_{n-1}(X)$.

   De plus, $\int_0^1 C_n(t)\mathrm{d}t = -\int_1^0 C_n(1-u)\mathrm{d}u$ en posant $u = 1 - t$ Finalement $\int_0^1 C_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (-1)^n B_n(u)\mathrm{d}u = 0$ (car $n > 0$).

   Par unicité de la suite (B_n), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = C_n$.

7. Pour le cas n pair, $B_n(X) = B_n(1 - X)$ et donc la courbe représentative de B_n est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

   Dans le cas n impair, on trouve une symétrie par rapport au point de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Pour le voir on peut introduire la fonction $f_n : t \mapsto b_n(t - \frac{1}{2})$ qui est de la parité de n.

8. On a $B_n(0) = B_n(1)$ d'après la question 5. De plus, en évaluant la relation de la question 6 en 0, $B_n(0) = (-1)^n B_n(1) = -B_n(1)$.
   Donc $B_n(0) = B_n(1) = 0$. En évaluant en $\frac{1}{2}$, on trouve $B_n(\frac{1}{2}) = -B_n(\frac{1}{2}) = 0$.

9. La propriété est vraie pour $m = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que B_{2m+1} en s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$. Montrons que B_{2m+3} ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.
   Or $B_{2m+3}' = B_{2m+2}$ qui est strictement monotone sur $]0, \frac{1}{2}[$ (par hypothèse de résurrence, sa dérivée est de signe strict constant).
   Si B_{2m+3} s'annule en un $a \in]0, \frac{1}{2}[$, alors B_{2m+3} s'annule en 0 et a donc sa dérivée s'annule sur $]0, a[$ d'après le théorème de Rolle. De même B_{2m+3}' s'annule sur $]a, \frac{1}{2}[$ car $B_{2m+3}(a) = B_{2m+3}(\frac{1}{2})$.
   Une fonction strictement monotone sur un intervalle ne peut pas s'y annuler deux fois. Contracdiction et donc B_{2m+3} ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.
   Par réccurence, on peut conclure.

10. C'est vrai pour $m = 0$. Pour $m > 0$, $B_{2m}' = B_{2m-1}$ qui s'annule seulement en $0, \frac{1}{2}$ et 1 (car un point d'annulation sur $]\frac{1}{2}, 1[$ donnerai un autre point dans $]0, \frac{1}{2}[$ d'après la question 6 (ou 7)).
    Ainsi on a deux possibilités de variations pour la fonction $f_{2m} : t \mapsto B_{2m}(t) - B_{2m}(0)$.

t	0	$\frac{1}{2}$	1
f_{2m}	0 $\nearrow$		$\searrow$ 0

t	0	$\frac{1}{2}$	1
f_{2m}	0 $\searrow$		$\nearrow$ 0

et donc f_{2m} est bien de signe constant sur $[0,1]$.

Partie II

1. C'est du cours. Encadrement pour $t \in [k, k+1]$ de $f(t)$ par des constante + croissance de l'intégrale.
2. On prend $a = \frac{1}{2}$ et $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$.
   On a alors pour $N \in \mathbb{N}$, $\int_2^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum\limits_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_1^N f(t)\mathrm{d}t$.
   En traitant à part le cas $\alpha = 1$, on peut calculer une primitive et conclure par encadrement de la série converge ssi $\alpha > 1$. On trouve pour $\alpha > 1$, $\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha-1)} \leqslant \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$.
3. 1 est le premier terme de la somme de la série donc $1 \leqslant \zeta(\alpha)$ car il s'agit d'une série à termes positifs. L'autre inégalité est une conséquence directe du calcul précédent, en ajoutant 1 pour considérer la somme à partir de 1 et non plus de 2.
4. On trouve $\zeta(\alpha) \underset{-1}{\sim} \frac{1}{1-\alpha}$ par encadrement du quotient, et en remarquant que $2^{\alpha+1} \underset{\alpha\to-1}{\to} 1$.

Partie III

1. Voir le DM 3
2. On a pour $t \in]0,1[$, $\varphi_n(1-t) = \frac{B_n(1-t)-B_n(0)}{\sin(\pi-\pi t)} = \frac{(-1)^n B_n(t)-B_n(0)}{\sin(\pi t)} = (-1)^n \frac{B_n(t)-(-1)^n B_n(0)}{\sin(\pi t)}$.
   Or $(-1)^n B_n(0) = B_n(1) = B_n(0)$ d'après la question $I.6$ (évalué en 1) et $I.5$.
   Ainsi $\varphi_n(1-t) = (-1)^n \varphi_n(t)$.
3. D'après la question précédente, si on prouve que φ_n est prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ alors on pourra prolonger φ_n en 1 en posant $\varphi(1) = (-1)^n \varphi_n(0)$ et le prolongement sera $\mathcal{C}^1$.
   Or $B_n(t) - B_n(0) = 0 + B_n'(0)t + o_0(t)$ (B_n est $\mathcal{C}^1$, on applique Taylor-Young) et $\sin(\pi t) \underset{0}{\sim} \pi t$ et donc $\varphi(t) = \frac{1}{\pi}B_n'(0) + o_0(1)$ donc $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\to} \frac{B_n'(0)}{\pi}$ et est prolongeable par continuité en 0 (et donc en 1).
   Pour la classe $\mathcal{C}^1$ deux méthodes. On peut écrire φ_n comme le quotient de $t \mapsto \frac{B_n(t)-B_n(0)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\sin(\pi t)}{t}$ qui sont DSE sur $\mathbb{R}$ en entier donc $\mathcal{C}^\infty$ et le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1[$.
   Sinon on retrousse nos manches. Pour $t \in]0,1[$,
   $$\varphi'(t) = \frac{B_n'(t)\sin(\pi t) - (B_n(t) - B_n(0))\pi\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)^2}$$
   Or $\sin(\pi t)^2 \underset{0}{\sim} \pi^2 t^2$. De plus, $B_n'(t) = B_n'(0) + B_n''(0)t + o_0(t)$, $\sin(\pi t) = \pi t + o_0(t^2)$ donc $B_n'(t)\sin(\pi t) = B_n'(0)\pi t + B_n''(0)\pi t^2 + o_0(t^2)$
   De même, $\pi(B_n(t) - B_n(0))\cos(\pi t) = \pi(B_n'(0)t + \frac{B_n''(0)}{2}t^2 + o_0(t^2))(1 + o_0(t)) = \pi B_n'(0)t + \frac{\pi B_n''(0)}{2}t^2 + o_0(t^2)$.
   Pour ces calculs on a usé du fait que $t o_0(t) = o_0(t^2)$ pour réduire l'ordre des DL à considérer.
   Finalement, par somme puis quotient $\varphi'(t) = \frac{B_n''(0)}{2\pi} + o_0(1)$. Ainsi φ' possède une limite finie en 0, φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et continue sur $[0,1[$ donc est $\mathcal{C}^1$sur $[0,1[$ d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$. On conclut en 1 comme pour la continuité.
4. Voir le DM 3, on dérive f et on intègre $t \mapsto \sin(xt)$ pour $x \neq 0$. Il faut voir que f' est bornée pour majorer l'intégrale obtenue (en valeur absolue) par une quantité qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
5. $I_{n,0} = \int_0^1 B_n(t) \times 1\mathrm{d}t = 0$ sauf si $n = 0$ et $I_{0,0} = 1$.
   Pour $k > 0$, $I_{0,k} = \int_0^1 \cos(2k\pi t)\mathrm{d}t = 0$.
   Toujours pour $k > 0$, $I_{1,k} = \int_0^1 t\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t$ (d'après le calcul de $I_{0,k}$). On effectue une intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : \frac{1}{2k\pi}\sin(2k\pi t)$ ($\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$). On trouve $I_{1,k} = 0$.
6. On effectue la même intégration par parties, avec B_n de classe $\mathcal{C}^1$.
   $I_{n,k} = [B_n(t)\frac{1}{2k\pi}\sin(2k\pi t)]_0^1 - \frac{1}{2k\pi t}\int_0^1 B_n'(t)\sin(2k\pi t)\mathrm{d}t$. Le crochet est nul, et on effectue une deuxième intégration par parties, sur des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$. $I_{n,k} = \frac{1}{(2k\pi)^2}(B_n'(1) - B_n'(0) - \int_0^1 B_n''(t)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t =$

$\frac{1}{(2k\pi)^2}(B_{n-1}(1)-B_{n-1}(0)-I_{n-2,k})$ car $B_n'=B_{n-1}$ et $B_n''=B_{n-2}$ car $n\geqslant 2$. Remarquons, que pour $n\neq 2$, $B_{n-1}(1)=B_{n-1}(0)$ et donc $(I_{2p+1,k})_p$ est géométrique de premier terme $I_{1,k}=0$ donc est nulle.

Le même raisonnement montre que $I_{2p,k}=\frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}(1-I_{0,k})$ (car notre relation donne $I_{2,k}=\frac{1}{2k\pi}(1-I_{0,k})$).

La question précédente conclut.

7. Calculons

$$A=\int_0^1\varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\mathrm{d}t=\int_0^1(B_{2m}(t)-B_{2m}(0))\frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$
$$=\int_0^1(B_n(t)-B_n(0))(1+2\sum_{k=1}^{N}\cos(2k\pi t))\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale (la somme est finie),

$$A=\int_0^1 B_{2m}(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 B_{2m}(0)\mathrm{d}t+2\sum_{k=1}^{N}\int_0^1 B_{2m}(t)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t-\int_0^1 B_{2m}(0)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t$$

. Comme $2m>0$, la première intégrale est nulle.

$A=0-B_{2m}(0)+2\sum\limits_{k=0}^{N}I_{2m,k}-B_{2m}(0)I_{0,k}=-B_{2m}(0)+2\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{m-1}}{(2k\pi)^{2m}}$

8. Faisons tendre N vers $+\infty$ dans la relation précédente.

D'après la question 4, $A\underset{N\to+\infty}{\to}0$ donc $B_{2m}(0)=2(-1)^{m-1}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2m}}$

Ainsi $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}}=(-1)^{m-1}B_{2m}(0)2^{2m-1}\pi^{2m}$.

Avec $m=1$, $\zeta(2)=B_2(0)\times 2\times\pi^2=\frac{\pi^2}{6}$.

Avec $m=2$, $\zeta(4)=-B_4(0)\times 8\times\pi^4=\frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 2

Partie I

1. $\lambda_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
2. On a $|\lambda_2|<1$ car $\sqrt{5}\in]2,3[$. Ainsi $\sum_{n\geqslant 0}\lambda_2^n$ converge et on a même

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}\lambda_2^n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\lambda_2}=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$$

en multipliant par la quantité conjuguée.

3. Voir le cours.
4. f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\lambda_1,\lambda_2\}$, tout comme $g:x\mapsto x^2+x-1$. De plus, $g':x\mapsto 2x+1, g'':x\mapsto 2$ et pour $k\geqslant 3, g^{(k)}=0$.

En appliquant la formule précédente, en $x\neq\lambda_1,\lambda_2$

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x)$$

Ainsi, si $n\geqslant 1$, vu que $(fg)^{(n-1)}=(1)^{(n)}=0$ on obtient bien la relation demandée car $\binom{n}{1}=n$ et $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

5. (a) $u_0=f(0)=-1$ et $u_1=f'(0)=-1$.

   (b) On évalue la relation de la question 4 en 0 (elle y est valable) :

$$-1f^{(p)}(0)+pf^{(p-1)}(0)+p(p-1)f^{(p-2)}(0)=0$$

En divisant par $p!>0$, $-u_p=\frac{p}{p!}(p-1)!u_{p-1}+\frac{p(p-1)}{p!}(p-2)!u_{p-2}=0$.

Il reste à simplifier les factorielles et isoler u_p.

(c) On résout l'équation caractéristique $r^2 = r+1$ de solutions $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\lambda_2$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\lambda_1$. Ainsi, pour $p \geqslant 0$, $u_p = a(-\lambda_1)^p + b(-\lambda_2)^p$ où a, b sont des réels à déterminer.
Or $u_0 = -1 = a+b$ et $u_1 = -1 = -a\lambda_1 - b\lambda_2$. Ainsi $b(\lambda_1 - \lambda_2) = -\lambda - 1 = \lambda_2$ (relation coefficient racines)
Donc $b = \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$. De même $a = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$.
Comme $\lambda_1 - \lambda_2 = -\sqrt{5}$, $u_p = \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{5}}(\lambda_2^{p+1} - \lambda_1^{p+1})$.

6. Il s'agit juste de recopier le théorème de Taylor-Young. Ne pas oublier de préciser que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]\lambda_2, \lambda_1[$ qui contient 0.

7. (a) $\alpha = -\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ conviennent en mettant au même dénominateur.

(b) g_1 et g_2 sont $\mathcal{C}^\infty$ sauf en λ_1 et λ_2 respectivement. Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ que $g_1^{(n)} x \mapsto \alpha(-1)^n n!(x-\lambda_1)^{-n-1}$.
Alors $g_1^{(n+1)} : x \mapsto \alpha(-1)^n n! \times (-n-1)(x-\lambda_1)^{-n-2}$ qui est bien $\alpha(-1)^{n+1}(n+1)!(x-\lambda_1)^{-(n+1)-1}$.
Comme cette expression est valable pour $n = 0$, on conclut par récurrence.
De même pour g_2 en remplaçant λ_1 par λ_2.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. $p!u_p = f^{(p)}(0) = g_1^{(p)}(0) + g_2^{(p)}(0) = \frac{(-1)^p \alpha p!}{(-\lambda_1)^{p+1}} + \frac{(-1)^p \beta p!}{(-\lambda_2)^{p+1}}$.
Or $\lambda_1\lambda_2 = -1$ d'après les relations coefficients racines, donc $u_p = \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{5}}\lambda_2^{p+1} - \frac{(-1)^p}{\sqrt{5}}\lambda_1^{p+1}$.
C'est cohérent avec le résultat précédent.

Partie II

1. Voir le DS 4.
2. Soit $y > 1$. Alors $\frac{1}{y} \in]0,1[$ et on peut appliquer la relation de la question précédente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{y^n} = \frac{1}{y} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{y})^2} = \frac{1}{y-2+\frac{1}{y}}$$

3. (a) Même raisonnement qu'en I.5.c, mais cette fois avec $0 = a+b$ et $1 = -\lambda_1 a - \lambda_2 b$. On trouve $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}\ w_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((-\lambda_1)^n - (-\lambda_2)^n)$$

4. Remarquons que $|\lambda_2| < 1$ et $|\lambda_1| > 1$ donc $w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}(-\lambda_1)^n$ et on trouve par la rège de d'Alembert (et comparaison de séries entières à terme général positifs) que le rayon de convergence est $\mathbb{R} = \frac{1}{-\lambda_1} = \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. Soit $x \in]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}[$.

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} w_{n-2} x^n \\ &= w_0 + w_1 x - w_0 x + \sum_{n=2}^{+\infty}(w_n - w_{n-1} - w_{n-2})x^n = x\end{aligned}$$

6. Soit $y \neq 0$ tel que $|\frac{1}{y}| < \lambda_2$ ie $y \in]-\infty, -\lambda_2[\cup]\lambda_2, +\infty[$. Remarquons que si $|\frac{1}{y}| < \lambda_2$ alors $\frac{1}{y} \neq \lambda_2$ et de plus $\frac{1}{y} \neq \lambda_1$ car $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Alors $1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \neq 0$ et on peut appliquer la question précédente et diviser par $1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}$. Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{y^n} = \frac{1}{y}\frac{1}{1-\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y-1-\frac{1}{y}}$$