Espaces préhilbertiens réels

1. Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, exemples classiques.
2. Norme, propriétés (identité du parallélogramme, Cauchy-Schwartz, inégalité triangulaire).
3. Familles orthogonales et orthonormales. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls, théorème de Pythagore.
4. Bases orthonormales : calcul de coordonnées par produit scalaire, de produit scalaire en fonction des coordonnées.
5. Orthonormalisation de Gram-Schmidt.
6. Orthogonal d'un sous-espace, projection orthogonale, symétrie orthogonale.
7. Calcul de projection quand on dispose d'une base orthonormée.
8. Isométries : définition, caractérisation par l'image d'une base orthonormée.
9. Composition et réciproque d'une isométrie
10. Matrices orthogonales : caractérisations, reconnaissance en pratique (les colonnes forment un base orthonormée).
11. Matrice d'une isométrie dans une base orthonormée.
12. Matrice orthogonale et symétrique : ce sont des matrices de symétrie orthogonales.

Questions de cours

1. Prouver que $\varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ est un produit scalaire.
2. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\forall (x, y) \in E\ (x|y) = (f(x)|f(y))$ ssi $\forall x \in E\ \|f(x)\| = \|x\|$.
3. Savoir appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur une base de $\mathbb{R}^3$ munit du produit scalaire canonique.