

Table des matières

I Matrices symétriques réelles	1
I.1 Lien avec le produit scalaire	1
I.2 Théorème spectral	2
II Coniques	2
II.1 Forme réduite	2
II.2 Tracés	2
II.3 Réduction d'une conique	3
III Taylor-Young à l'ordre 2	3
III.1 Matrice hessienne	3
III.2 Etude des extrema	4

I Matrices symétriques réelles

I.1 Lien avec le produit scalaire

Rappel : Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique peut se calculer par $(X|Y) = {}^tXY$.

I.1.1 Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi ${}^tA = A$. L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

I.1.2 Exemple

Rappel : le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $(A|B) = \text{tr}({}^tAB)$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (en semble des matrices antisymétriques).

On peut ainsi interpréter la transposition comme la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

I.1.3 Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique ssi tPAP est symétrique.

I.1.4 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ssi pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ (pour le produit scalaire canonique).

Preuve.

- Si A est symétrique, alors $(AX|Y) = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tXAY = (X|AY)$ pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.
- Réciproquement, supposons que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ ie ${}^tX{}^tAY = {}^tXAY$ Montrons que ${}^tA = A$.

En notant (E_1, \dots, E_n) la base canonique de \mathbb{R}^n , pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $AE_j = C_j$ la j -ième colonne de A donc $(E_i|AE_j) = a_{i,j} = {}^tE_iAE_j$. Ainsi, ${}^tE_i{}^tAE_j = a_{j,i}$ (le coefficient d'indices i, j de tA).

Par hypothèse les deux produits matriciels sont égaux, donc $a_{i,j} = a_{j,i}$ et A est bien symétrique.

On a prouvé de manière plus générale que $(X|AY) = ({}^tAX|Y)$ et $(AX|Y) = (X|{}^tAY)$. ■

I.1.5 Un calcul important

Calculer, pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tXAX avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On obtient $x \times (ax + by) + y \times (cx + dy) = ax^2 + (b + c)xy + dy^2$.

I.1.6 Théorème

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Les valeurs propres de A sont réelles.
- Si X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes, alors $X_1 \perp X_2$. Autrement dit, les sous espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Preuve.

- Hors programme. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A (c'est possible dès que

$n \geq 1$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss). Soit $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ un vecteur

propre associé. Alors $AX = \lambda X$.

Alors $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ car A est à coefficients réels (reprendre la formule de produit matriciel, et conjuguer chaque terme). On a alors ${}^t(AX)\bar{X} = \lambda X\bar{X} = \lambda \sum_{i=1}^n |z_i|^2$. De plus, ${}^t(AX)\bar{X} = {}^tX A\bar{X} = \bar{\lambda}{}^tX\bar{X} = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |z_i|^2$.

Comme $\sum_{i=1}^n |z_i|^2 > 0$ on a bien $\bar{\lambda} = \lambda$.

2. Calculons $(AX_1|X_2)$ de deux manières. On a d'une part $(AX_1|X_2) = \lambda_1(X_1|X_2)$ et d'autre part $(AX_1|X_2) = (X_1|AX_2) = \lambda_2(X_1|X_2)$. Ainsi $(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1|X_2) = 0$ et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(X_1|X_2) = 0$. ■

I.2 Théorème spectral

I.2.1 Exemple Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tout d'abord A est de rang 1 donc $\ker(A) = E_0$ est de

dimension 2 et d'équation $x + y + z = 0$. Ainsi $E_0 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ La troisième valeur propre de A est 3 car la somme des valeurs propres est égale à la trace.

De plus $E_3 \perp E_0$ donc $E_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finalement $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Remarquons que $\frac{1}{3}A$ est une matrice de projecteur orthogonal.

I.2.2 Théorème

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PD^tP = PDP^{-1}$.

Preuve.

Hors programme.

Le cas $n = 1$ est trivial. Soit $n \geq 2$ fixé.

Supposons que tout matrice symétrique réelle de taille $r < n$ soit diagonalisation dans une base orthonormée et notons f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in Sp(A)$. Alors λ est réelle et E_λ est stable par f . Si $\dim(E_\lambda) = n$, il suffit d'appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à une base de E_λ .

Sinon, soit $F = E_\lambda^\perp$ et $X \in F$. Montrons que $f(X) = AX \in F$. Pour cela, on montre que AX est orthogonal à tout élément de E_λ . Soit donc $Y \in E_\lambda$. $(AX|Y) = \lambda(X|Y) = 0$ donc F est stable par f .

Notons $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F et $A_F = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f|_F) = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$. On va montrer que A_F est symétrique réelle de taille $p < n$.

Or, pour $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $a_{i,j} = (f_F(e_j)|e_i) = (Ae_i|e_j)$ d'après le chapitre sur les espaces euclidiens. Comme $e_i, e_j \in \mathbb{R}^n$, $(Ae_i|e_j) = (e_i|Ae_j) = (Ae_j|e_i) = a_{j,i}$ d'après I.1.4.

Ainsi A_F est symétrique réelle de taille $p < n$ et est donc diagonalisable (par hypothèse de récurrence forte) dans une base \mathcal{B}'_F orthonormale (base de F). Comme $E_\lambda \oplus F = \mathbb{R}^n$ et que les espaces sont orthogonaux, la concaténation d'une BON de E_λ et d'une BON de F est une BON de \mathbb{R}^n et on a trouvé une BON de \mathbb{R}^n dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Finalement, par récurrence, le théorème spectral est vrai. ■

I.2.3 Exemple

Diagonaliser dans une BON la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et donner l'interprétation géométrique de la matrice de passage.

II Coniques

II.1 Forme réduite

II.1.1 Définition

une conique de \mathbb{R}^2 est l'ensemble des points $M : (x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

II.1.2 Exemple

Les cercles sont des cas particuliers de coniques.

II.1.3 Définition

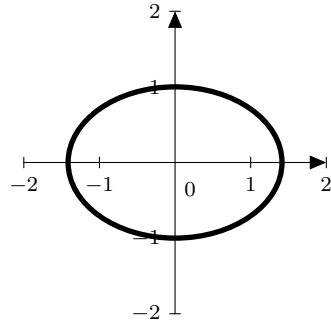
Soient $a, b, p > 0$. On appelle équation réduite de conique les équations suivantes :

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)
- $y^2 = 2px$ (parabole)

II.2 Tracés

Nous allons paramétrer chacune de ces coniques pour les tracer.

1. Une ellipse admet un paramétrage par $\exists \theta \in [0, 2\pi]$ $\begin{cases} x = a \cos(\theta) \\ y = b \sin(\theta) \end{cases}$. On obtient un tracé de la forme : Ici $b = 1, a > b$. on observe deux axes de symétrie (et le centre O



qui est centre de symétrie).

2. Une hyperbole est la réunion de deux arcs paramétrés : $\exists t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch}(t) \\ y = b \operatorname{sh}(t) \end{cases}$.

Encore une fois on observe deux axes de symétries.

3. Un parabole se paramètre en $\exists t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$. Cette fois nous n'avons plus que l'axe (Ox) qui est axe de symétrie.

II.3 Réduction d'une conique

II.3.1 Ecriture matricielle

Fixons les coefficients d'une équation de conique.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$. Alors ${}^tXAX = ax^2 + bxy + cy^2$. Ainsi en posant en plus $L = (d \ e)$, on obtient :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \iff {}^tXAX + LX + f = 0$$

Le but est maintenant de diagonaliser A , ce qui fait disparaître le terme "rectangle" en xy .

D'après le théorème spectral, on peut toujours trouver une base orthonormée directe dans laquelle l'équation n'a plus de terme en xy .

II.3.2 Après rotation

Comme A est symétrique réelle, on peut la diagonaliser dans une base orthonormée directe. Notons λ, μ ses valeurs propres. On suppose $\lambda \neq \mu$ (sinon, A était déjà diagonale, les homothétie ne changent pas de matrice par changement de base). Notons P la matrice de passage (qui diagonalise A).

Posons $X' = P^{-1}X = {}^tPX$ ie $X = PX'$, les coordonnées de X dans la nouvelle base.
 ${}^tXAX + LX + f = 0 \iff {}^t(PX')APX' + LPX' + f = 0 \iff {}^tX'DX' + (LP)X' + f = 0 \iff \lambda x'^2 + \mu y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$ où $LP = (d' \ e')$.

1. Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, on obtient (mise sous forme canonique) soit une parabole soit une réunion de droites.
2. Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, on passe sous forme canonique (pour x et y , attention à bien factoriser par λ et μ) pour obtenir soit une équation d'ellipse soit une équation d'hyperbole (au moins pour le membre de gauche), après changement de repère par translation (la mise sous forme canonique donne les coordonnées du centre, comme pour les cercles).

Suivant la valeur de la constante, on peut obtenir un seul point, l'ensemble vide ou deux droites sécantes.

II.3.3 Exemple

II.3.4 Méthode

Pour réduire une équation de conique :

1. Diagonaliser A , puis écrire l'équation dans le nouveau repère.
2. Passer sous forme canonique en x et y (ou seulement l'un des deux).
3. Exhiber l'éventuel centre, faire le tracé dans le nouveau repère.

III Taylor-Young à l'ordre 2

III.1 Matrice hessienne

III.1.1 Théorème (Taylor-Young, ordre 2)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 . Soit $(x_0, y_0, z_0) \in U$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$

tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \right) + o_0(h^2 + k^2)$$

Il faut comprendre ce o_0 comme représentant une limite quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Preuve.
Admis

III.1.2 Définition

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 .

Soit $(x_0, y_0) \in U$. La **matrice hessienne** de f au point (x_0, y_0) est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

III.1.3 Réécriture de la formule de Taylor

On se place dans le même cadre que le théorème, on note $X = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ et H la matrice

hessienne de f en $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

On a alors

$$f(X_0 + X) = f(X_0) + (X | \overrightarrow{\text{grad}} f(X_0)) + \frac{1}{2} {}^t X H X + o_0(\|X\|^2)$$

III.2 Etude des extrema

III.2.1 Cas d'un point critique

On a alors $\overrightarrow{\text{grad}} f(X_0) = 0$.

Réduisons la matrice H (qui dépend de $X_0 \dots$) : il existe $P \in O_2(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda, \mu)$ telles que $H = P D P^{-1}$.

Alors pour $X \in \mathbb{R}^2$, ${}^t X H X = (P^{-1} X) D P^{-1} X = {}^t X' D X' = \lambda h'^2 + \mu k'^2$. De plus, $\|X'\| = \|X\|$ car P est orthogonale. On a alors

$$f(X_0 + X) = f(X_0) + \frac{1}{2} (\lambda h'^2 + \mu k'^2) + o_0(\|X'\|^2)$$

Ainsi $f(X_0 + X) - f(X_0)$ est du signe de $\lambda h'^2 + \mu k'^2$ pour h, k (ou h', k') "proche" de 0.

Cas $\lambda, \mu > 0$: f atteint un minimum local en X_0 .

Cas $\lambda, \mu < 0$: f atteint un maximum local en X_0 .

Cas λ, μ de signes stricts opposés : f n'a ni maximum local ni minimum local en X_0 .

On a un **point selle** ou **point col** en X_0 .

Cas $\lambda\mu = 0$: on ne peut pas conclure.

Remarquons que $\det(H) = \lambda\mu$ et $\text{tr}(H) = \lambda + \mu$. Ainsi on pourra distinguer les 4 cas précédents sans connaître λ ni μ .

III.2.2 Théorème

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 . Soit $X_0 \in U$ un point critique de f .

Notons également H la matrice hessienne de f au point X_0 .

1. Si $\det(H) > 0$ alors f possède un extremum local en X_0 .
 - (a) si $\text{tr}(H) > 0$, il s'agit d'un minimum.
 - (b) si $\text{tr}(H) < 0$, il s'agit d'un maximum.
2. Si $\det(H) < 0$, alors f n'a ni minimum local ni maximum local en X_0 .
3. Si $\det(H) = 0$, on ne peut pas conclure.

III.2.3 Exemple

Considérons $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^4 + y^4 - (x - y)^2 \end{cases}$. Trouvons les éventuels extrema.

Tout d'abord, f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 en tant que fonction polynomiale.

— Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 2(x - y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 2(x - y)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = 0 &\iff \begin{cases} 4x^3 - 2(x - y) = 0 \\ 4y^3 + 2(x - y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 4x^3 - 2(x - y) = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ y = -x \end{cases} &\iff x(x^2 - 1) = 0 \text{ et } y = -x \end{aligned}$$

On a trois solutions : $A = (0, 0)$, $B = (-1, 1)$, $C = (1, -1)$.

— Calculons maintenant la hessienne au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

En A , $H(A)$ est de rang 1. On ne peut pas conclure a priori. Or $f(0, 0) = 0$. De plus, $f(x, x) = 2x^4 > 0$ pour $x \neq 0$, $f(x, -x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2) < 0$ pour $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Il n'y a donc pas d'extremum.

En B et C , $H = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$. $\det(H) = 96 > 0$ et $\text{tr}(H) = 20$ donc f possède un minimum local en ces deux points, qui vaut $f(B) = f(C) = -2$.

III.2.4 Exemple

Etudier les extrema de $f : \begin{cases} \mathbb{R} \times]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto y(x^2 + (\ln(y))^2) \end{cases}$

f est \mathcal{C}^2 sur son ensemble de définition par produits et somme. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + (\ln(y))^2 + y \times 2\frac{1}{y} \ln(y) = x^2 + \ln(y)(\ln(y) + 2)$.

Les points critiques de f sont $(0, 1)$ et $(0, e^{-2})$.

En $(0, 1)$, $f(0, 1) = 0$ qui est clairement un minimum global. En $(0, e^{-2})$, $f(0, e^{-2}) = 4e^{-2}$.

Calculons la matrice hessienne. $H(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2\frac{\ln(y)}{y} + \frac{2}{y} \end{pmatrix}$ En $(0, e^{-2})$ on obtient $\begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^2 \end{pmatrix}$ de déterminant $-4 < 0$. f n'a ni minimum local ni maximum local en ce point.