

Table des matières

| | |
|---|---|
| I Matrices symétriques réelles | |
| I.1 Lien avec le produit scalaire | 1 |
| I.2 Théorème spectral | 1 |
| II Coniques | |
| II.1 Forme réduite | 1 |
| II.2 Tracés | 1 |
| II.3 Réduction d'une conique | 1 |
| III Taylor-Young à l'ordre 2 | |
| III.1 Matrice hessienne | 1 |
| III.2 Etude des extrema | 2 |

I Matrices symétriques réelles

I.1 Lien avec le produit scalaire

Définition 1

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi ${}^tA = A$. L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ssi pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ (pour le produit scalaire canonique).

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Les valeurs propres de A sont réelles.
2. Si X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes, alors $X_1 \perp X_2$. Autrement dit, les sous espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

I.2 Théorème spectral

Théorème 2

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PD^tP = PDP^{-1}$.

II Coniques

II.1 Forme réduite

Définition 2

une conique de \mathbb{R}^2 est l'ensemble des points $M : (x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Définition 3

Soient $a, b, p > 0$. On appelle équation réduite de conique les équations suivantes :

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)
- $y^2 = 2px$ (parabole)

II.2 Tracés

II.3 Réduction d'une conique

Méthode

Pour réduire une équation de conique :

1. Diagonaliser A , puis écrire l'équation dans le nouveau repère.
2. Passer sous forme canonique en x et y (ou seulement l'un des deux).
3. Exhiber l'éventuel centre, faire le tracé dans le nouveau repère.

III Taylor-Young à l'ordre 2

III.1 Matrice hessienne

Théorème 3 (Taylor-Young, ordre 2)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 . Soit $(x_0, y_0, z_0) \in U$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \right) + o_0(h^2 + k^2)$$

Il faut comprendre ce o_0 comme représentant une limite quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Définition 4

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 .

Soit $(x_0, y_0) \in U$. La **matrice hessienne** de f au point (x_0, y_0) est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

III.2 Etude des extrema**Théorème 4**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 . Soit $X_0 \in U$ un point critique de f .

Notons également H la matrice hessienne de f au point X_0 .

1. Si $\det(H) > 0$ alors f possède un extremum local en X_0 .
 - (a) si $\text{Tr}(H) > 0$, il s'agit d'un minimum.
 - (b) si $\text{Tr}(H) < 0$, il s'agit d'un maximum.
2. Si $\det(H) < 0$, alors f n'a ni minimum local ni maximum local en X_0 .
3. Si $\det(H) = 0$, on ne peut pas conclure.