Espaces préhilbertiens réels

1. Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, exemples classiques.
2. Norme, propriétés (identité du parallélogramme, Cauchy-Schwartz, inégalité triangulaire).
3. Familles orthogonales et orthonormales. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls, théorème de Pythagore.
4. Bases orthonormales : calcul de coordonnées par produit scalaire, de produit scalaire en fonction des coordonnées.
5. Orthonormalisation de Gram-Schmidt.
6. Orthogonal d'un sous-espace, projection orthogonale, symétrie orthogonale.
7. Calcul de projection quand on dispose d'une base orthonormée.
8. Isométries : définition, caractérisation par l'image d'une base orthonormée.
9. Composition et réciproque d'une isométrie
10. Matrices orthogonales : caractérisations, reconnaissance en pratique (les colonnes forment un base orthonormée).
11. Matrice d'une isométrie dans une base orthonormée.
12. Matrice orthogonale et symétrique : ce sont des matrices de symétrie orthogonales.
13. Isométries du plan, reconnaître les matrices dans une base orthonormée.
14. Isométries de l'espace. Reconnaître les rotations, réflexions et opposés de rotation.

Compléments sur les équations différentielles

1. Rappels sur les techniques de première année : équation linéaire d'ordre 1, d'ordre 2 à coefficients constants.
2. Théorème de Cauchy pour les équations d'ordre 2 (à coefficients continus), description de l'ensemble des solutions.
3. Recherche de solutions développables en série entière.
4. Méthode de variation de la constante pour trouver une deuxième solution de l'équation homogène.
5. Système différentiel à coefficients constants : théorème de Cauchy et ensemble des solutions. Résolution dans le cas où la matrice est diagonalisable.

Questions de cours

1. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\forall (x,y) \in E\ (x|y) = (f(x)|f(y))$ ssi $\forall x \in E\ \|f(x)\| = \|x\|$.
2. Savoir appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur une base de $\mathbb{R}^3$ munit du produit scalaire canonique.
3. Résolution d'un système linéaire de taille 2, homogène, de matrice diagonalisable.