Exercice 1

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $xy' + 2y = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

2) Soit h la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que (E) possède une unique solution f définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2

On considère l'équation (E) $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$.

1. Déterminer une solution sur $\mathbb{R}$ polynomiale.
2. Déterminer les solutions de (E).

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

1. Déterminer une fonction f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, sous forme de fonction développable en série entière.
2. Montrer que f ne s'annule pas.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Résoudre $x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ puis sur $\mathbb{R}$.
(on pourra poser $z = x^2y$)

Exercice 5

Vérifier que la fonction $x \to (\arcsin x)^2$ est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$\left(1-x^2\right) y''(x) - xy'(x) = 2.$$

En déduire que cette fonction est développable en série entière sur $]-1,1[$ et déterminer son développement en série entière sur cet intervalle.

Exercice 6

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$x^2(1-x)\,y''(x) - x(1+x)\,y'(x) + y(x) = 0.$$

Reconnaître les sommes des séries trouvées.

En déduire toutes les solutions de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}^{-*}$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.

Exercice 7

On considère le système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 5y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 4z \end{cases}$, où x, y et z sont trois fonctions de la variable t, de classe $\mathcal{C}^1$.

1. De quel type de système s'agit - il ? Montrer que les trajectoires (les fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ solutions) de (S) sont contenues dans des plans parallèles.
2. Déterminer la solution de (S) dont la trajectoire Γ passe par $M\,(1;3;3)$ à l'instant $t = 0$. Préciser une équation du plan qui la contient.

Exercice 8

Résoudre le système différentiel réel : $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 \\ y_3' = 2y_1 - y_3 \end{cases}$ et donner la solution au problème de Cauchy en $(0, (a,b,c))$.

Exercice 9

Résoudre (E) : $\quad X'(t) = AX + B$ avec $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -te^t \end{bmatrix}$.

Exercice 10

Résoudre le système différentiel réel : $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$ en posant $z_1 = y_1 + y_2$ et $z_2 = y_1 - y_2$.