Devoir maison n°9

A rendre le 10/04.

Exercice 1
Dans cet exercice on souhaite trouver toutes les solutions de l'équation

$$y^{(4)} + y^{(3)} - 7y'' - y' + 6y = 0 \qquad (E_H)$$

Partie I

On utilise dans un premier temps le cours sur les systèmes différentiels.

1. Soit $y \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$.

   Calculer Y' et donner une condition nécessaire et suffisante sur Y, Y' pour que y soit solution de (E_H). On exhibera une matrice notée $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Résoudre l'équation (E_H). On ne perdra pas de vu qu'il suffit d'exprimer la première coordonnée de Y.

Partie II : l'algèbre linéaire à la rescousse

Cette partie n'utilise que des notions vues en 1ère année.
On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère les endomorphismes de E :

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right. , \ \varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f'' - f \end{array} \right. , \ \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f'' + f' - 6f \end{array} \right.$$

Pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ où $u^0 = Id_E$ et $u^k = u \circ \ldots u$ (k fois).

1. Exprimer φ et ψ sous forme $\varphi = A(D)$ et $\psi = B(D)$ où A, B sont des polynômes à préciser.
2. Calculer $\varphi(\psi(f))$ pour $f \in E$ puis AB.
3. Résoudre l'équation $\varphi(g) = 0_E$ d'inconnue $g \in E$. Quelle est la dimension du noyau de φ ?
4. Soit $g \in \ker(\varphi)$ fixée. Résoudre l'équation $\psi(f) = g$ d'inconnue $f \in E$.
5. Donner l'ensemble des solutions de (E_H) et l'exprimer comme un noyau dont on donnera la dimension.