Table des matières

I Variance, covariance

I.1 Rappels sur la variance

Définition 1
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On dit que X est d'espérance finie (ou admet un moment d'ordre 1) ssi $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge **absolument**.

Dans ce cas, on appelle **espérance de** X et on note $E(X)$ le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$.

Définition 2
Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X est de variance finie (ou que X admet un moment d'ordre 2) ssi X^2 est d'espérance finie et alors la variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$.

Dans ce cas, l'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 1
Soit X une variable aléatoire discrète de variance finie. $V(X) = 0$ ssi X est presque sûrement constante, c'est à dire qu'elle prend une seule valeur avec une probabilité 1 (et les éventuelles autres avec un probabilité 0).

Proposition 2
Soit X une variable aléatoire discrète possédant une variance finie. Alors pour $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ est de variance finie et $V(aX + b) = a^2V(X)$.

I.2 Covariance

Définition-Proposition 1
Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes. Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors la variable $(X - E(X))(Y - E(Y))$ est d'espérance finie.

Dans ce cas on appelle covariance de X et Y le réel

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

.

Proposition 3
Dans les conditions de la définition précédente :

1. $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
2. **Si** X et Y sont indépendantes **alors** $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.
3. la covariance est bilinéaire et symétrique.
4. $\operatorname{cov}(X, X) = V(X)$.

Proposition 4
Soit X, Y deux variables aléatoires admettant une variance finie.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$$

Théorème 1 (Cauchy-Schwartz)
On a $|\operatorname{cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{V(X)V(Y)}$

Définition 3
Soient X, Y deux variables aléatoires de variance finie et non nulle. Le coefficient de corrélation de X et Y est

$$\operatorname{cor}(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1, 1]$$

II Fonctions et probabilités

II.1 Fonction de répartition

Définition 4
Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle fonction de répartition de X et on note F_X la fonction

$$F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

Proposition 5
Avec les notations de la définition, on a :

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

II.2 Fonction génératrice

Définition 5
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice (ou série génératrice) de X est la fonction

$$G_X : t \mapsto E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

G_X est définie au moins sur le segment $[-1, 1]$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et $G_X(1) = 1$.

Théorème 2
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.

1. X possède une espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et alors $E(X) = G'_X(1)$.
2. X possède une variance finie ssi G_X est deux fois dérivable en 1 et alors

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 .$$

Théorème 3
Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et **indépendantes**, notons R_X et R_Y les rayons de convergence de G_X et G_Y respectivement. Posons également $r = \min(R_X, R_Y)$

Alors G_{X+Y} est de rayon $R \geqslant r$ et

$$\forall t \in]-r, r[\; G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

III Etude asymptotique

III.1 Interprétation de la loi de Poisson

Proposition 6
Soit $\lambda > 0$.

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant1}$ de variables aléatoires telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ où $p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

III.2 Loi des grands nombres

Théorème 4 (Inégalité de Markov)
Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives, d'espérance finie.

$$\forall a > 0 \; \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

Théorème 5 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Soit X une variable aléatoire de variance finie.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \mathbb{P}(|X - E(X)| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Théorème 6 (Loi faible des grands nombres)
Soit $(X_n)_{n\geqslant1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2.

On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et on note $m = E(X_1)$ l'espérance commune aux X_k.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

. Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, la limite est nulle.