Exercice 1

Partie I

1. A étant triangulaire, on peut directement voir que ses valeurs propres sont 1 et 2. Ainsi χ_A est scindé à racines simples dons A est diagonalisable.
2. De même $Sp(B) = \{1, 2\}$. On ne peut pas conclure directement.

   Calculons $E_1(B)$. Pour $X \in \mathbb{R}^4$, $BX = X$ ssi $X \in \text{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix})$.

   $E_2(B) = \text{Vect}(\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix})$.

   Donc B est diagonalisable dans la base constituée des 4 vecteurs précédents.
3. (a) C'est du cours. C'est la base canonique. On prouve la liberté facilement et la dimension conclut.

   (b) On trouve, $AE_{11} = E_{11}$, $AE_{12} = E_{12}$, $AE_{21} = 3E_{11} + 2E_{21}$ et $AE_{22} = 3E_{12} + 2E_{22}$.

   (c) Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = B$.

   (d) On déduit de la question 2 que φ_A est diagonalisable et qu'une base de vecteurs propres est $(E_{11}, E_{12}, \begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 3\\0 & 1\end{pmatrix})$.

Partie II

1. On a $AM = \lambda M$ soit encore $(A - \lambda I_n)M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Si $A - \lambda I_n$ était inversible, par produit par son inverse, on aurait $M = 0$ ce qui est exclu.

   Ainsi $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Il s'agit juste d'une redite, car $A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{R}) \iff \lambda \in Sp(A)$ (on peut le voir avec le déterminant, ou plus simplement en reprenant la définition d'une valeur propre).
3. Calculons AM par colonne. Toutes les colonnes nulles de M donnent des colonnes nulles par produit par A. La colonne non nulle X devient AX dans le produit, soit encore μX. Ainsi, pour chaque colonne, la multiplication par A revient à multiplier par μ et donc $AM = \mu M$ et M est bien non nulle (elle à une colonne non nulle).
4. On a montré que si $\lambda \in Sp(\varphi_A)$ alors $\lambda \in Sp(A)$. Puis dans la question précédente que $Sp(A) \subset Sp(\varphi_A)$. Ainsi $Sp(\varphi_A) = Sp(A)$.
5. Soit $X_1, \dots X_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A, associées aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ non nécessairement distinctes.

   On note $M_{i,j}$ la matrice dont les colonnes sont nulles sauf la $j$ième qui vaut X_i : on construit ainsi n matrices distinctes pour le même vecteur propre X_i.

   D'après la question 3, $M_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre λ_i. Montrons que $(M_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ est libre. Si on a $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j} M_{i,j} = 0$ pour des scalaires $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$, alors, en considérant la première colonne de cette combinaison, on a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,1} X_i = 0_{\mathbb{R}^n}$. Par liberté de notre base de vecteurs propres, tous les $\alpha_{1,j}$ sont nuls.

   Ce raisonnement est en fait valable pour la $j$ième colonne de notre combinaison pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ et la famille $(M_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ est bien libre.

   On a trouvé une base de vecteurs propres de φ_A qui est donc bien diagonalisable.

Exercice 2

Partie I La correction est donnée avec l'énoncé rectifié. On trouvait plutôt $\sin(a + b)$ et $-\cos(a + b)$ pour α et β

1. produit scalaire + det
2. $\alpha = (u_a|u_b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$. $\beta = (u_a|n_b) = -\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.
3. Formules géométriques pour le ps et le det dans le plan, appliquées à u_a, u_b. On calcule le det dans la BOND $\mathcal{B}$.
4. parité
5. Combinaisons des précédentes.

Partie II

1. La fonction à intégrer (de la variable t) est bien continue sur $[-\pi, \pi]$ qui est fermé.
2. (a) $g(x) \underset{x \to a}{\to} g(a)$.

   (b) inégalité triangulaire 2 : $||f(x)| - |f(a)|| \leqslant |f(x) - f(a)|$ + encadrement quand $x \to a$

   (c) Attention à la rédaction de l'implication.
3. On s'applique pour vérifier les hypothèses. L'intégrabilité (intégrale converge pour le module) dans la première est prouvée en 1 et 2. On doit dominer $x, t \mapsto itf(t)e^{ixt}$ ce qui se fait sans problème, vu que le module de notre exponentielle est 1 et $t \mapsto |tf(t)|$ est continue donc intégrable sur un segment.

4. (a) On peut remarquer, par des arguments de parité que $\varphi_f(x) = \frac{2i}{\pi}\int_0^\pi t\sin(xt)\mathrm{d}t$.

   Après IPP (attention,citer la classe $\mathcal{C}^1$),

$$\varphi_f(x) = \frac{2i}{\pi}\left(\left[t\frac{1}{-1}x\cos(xt)\right]_0^\pi + \frac{1}{x}\int_0^\pi \cos(xt)\mathrm{d}t\right) = \frac{2i}{\pi}\left(-\frac{\pi}{x}\cos(\pi x) + \frac{1}{x^2}\sin(\pi x)\right)$$

   (b) C'est parti pour un DL en 0 (et surtout pas une somme d'équivalents...). $\cos(\pi x) = 1 + o_0(x)$ et $\sin(\pi x) = \pi x + o_0(x^2)$. Donc $\varphi_f(x) = 2i\left(-\frac{1}{x} + o_0(1) + \frac{1}{x} + o_0(1)\right) = 0 + o_0(1)$. On obtient bien un prolongement par continuité en 0, de valeur $0 = \varphi_f(0)$ car f est impaire.

Partie III

1. C'est du cours ! Le théorème important est : une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle.
2. $\|c_k\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(2kt)+1}{2}\mathrm{d}t = 1$. Le fait que $k \neq 0$ nous permet d'intégrer avec une formule valable tout le temps.

   De même $\|s_k\|^2 = 1$. $\|c_0\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = 1$.
3. $(c_n|s_m) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\sin(mt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\sin((m+n)t) + \sin((m-n)t)\right)\mathrm{d}t = 0$ avec $m+n \neq 0$ et même si $m = n$ (attention à ne pas diviser par 0 !, il fallait traiter 2 cas).
4. Cette fois on linéarise et on fait apparaître une somme de cos.
5. Il s'agit d'une famille orthonormale.
6. (a) On a $f = \sqrt{2}a_0c_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_nc_n + b_ns_n)$. Par linéarité du produit scalaire par s_k, $(f|s_k) = b_k$ (un seul terme non nul) pour $k \in [\![1, n]\!]$. De même $(f|c_k) = a_k$ et $(f|c_0) = \sqrt{2}a_0$.

   (b) D'après le théorème de Pythagore $(f|f) = (\sqrt{2}a_0)^2 + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2$ (somme des coordonnées au carré, car la famille est orthonormale)
7. (a) Si f est impaire, alors $a_n = 0$ car fc_n est impaire. De même, si f est paire alors fs_n est impaire et donc $b_n = 0$.

   (b) Rappelons que $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_N|c_0)$ d'après la question 6a et $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f|c_0)$ par définition.

   De même, pour $n > 0$, $(f|c_n) = (S_N|c_n)$ et $(f|s_n) = (S_N|s_n)$. Or $(S_N - f|S_N) = (S_N|S_N) - (S_N|f) = (a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_nc_n + b_ns_n)|S_N) - (a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_nc_n + b_ns_n)|f) = 0$ Quand on développe les deux produits scalaires on obtient les mêmes sommes d'après la remarque précédente.

   (c) On a $S_N \in F_N$ et $(S_N - f) \perp S_N$, c'est à dire que S_N est le projeté orthogonal de f sur F_N.

   (d) Il s'agit encore une fois d'un “simple” Pythagore.

   (e) Les sommes partielles de cette série à terme positifs sont $\leqslant \|f\|^2$ d'après la question précédente. Donc la série converge et par comparaison de séries à termes positifs, il en est de même des séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$. Ainsi $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$.

   (f) C'est la remarque sur a_n
8. (a) On a $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi^2 - t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}[\pi^2 t - \frac{t^3}{3}]_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3}$.

   (b) D'après 7a, $b_n = 0$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi^2 - t^2)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left([(\pi^2 - t^2)\frac{1}{n}\sin(nt)]_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{4}{n\pi}\left([-t\frac{1}{n}\cos(nt)]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\mathrm{d}t\right) = \frac{-4\pi\cos(n\pi)}{\pi n^2}$$
$$= \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$$

   (c) Application directe pour la convergence : la série des a_n^2 converge.

   On a admis que l'inégalité de Bessel est en fait une égalité, ainsi $2a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \|f\|^2$.

   Or $\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - t^2)^2\mathrm{d}t = \frac{16\pi^4}{15}$ (on développe et on se retrousse les manches).

   Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{16\pi^4}{15} - \frac{8\pi^4}{9}$. Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \pi^4\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{18}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 3

1. Soit $t > 0$. $\sin \in \mathcal{D}([0,t],\mathbb{R})$ et $|\sin'| \leqslant 1$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis $|\sin(t) - \sin(0)| \leqslant 1 \times |t-0|$.
2. Il s'agit de prouver la convergence de ces intégrales pour $x > 0$ fixé. Voir le cours. Il s'agit de comparer (proprement) à la fonction positive $t \mapsto e^{-xt}$ qui est intégrable pour la convergence en $+\infty$ et de prolonger par continuité en $t \to 0$ pour l'existence de f.
3. Pour la domination pour la fonction f, on a $|e^{-xt}\sin(t)| \leqslant e^{-at}$ qui est intégrable et $\left|\frac{te^{-xt}\cos(t)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{a}te^{-at}$ qui est intégrable aussi par comparaison avec la fonction positive $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$.

   Pour la fonction g, la dérivée partielle est $\frac{-xte^{-xt}\cos(t) - e^{-xt}\cos(t)}{x^2}$ qui, en valeur absolue, est $\leqslant \frac{te^{-at}}{a} + \frac{e^{-at}}{a^2}$. Le deuxième terme est intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après le cours et pour le premier il s'agit encore de comparer à $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$.
4. On a $f'(x) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)\mathrm{d}t$ et par IPP (attention à la classe $\mathcal{C}^1$),

   $$\int_0^X \frac{e^{-xt}\cos(t)}{x}\mathrm{d}t = [-\frac{e^{-xt}\sin(t)}{x}]_0^X + \int\limits_0^X e^{-xt}\sin(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}e^{-xX}\sin(X) + \int\limits_0^X e^{-xt}\sin(t)\mathrm{d}t$$

   Par produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0 , le crochet tend vers 0 quand $X \to +\infty$ et donc $f'(x) = -g(x)$ pour tout $x > 0$.
5. Fait en cours aussi : on intègre une fonction à valeur complexes (remplacer $\sin(t)$ par e^{it}) puis on en prend la partie imaginaire.
6. On a montré, question 1, que $|f(x)| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} = \frac{1}{x}$. Le théorème d'encadrement conclut.
7. On a d'après la question 5, $f : x \mapsto -\arctan(x) + K$ sur $\mathbb{R}_+^*$ où K est un réel fixé qui vaut $\frac{\pi}{2}$ d'après la question précédente et le cours de sup sur la limite d'arctan.
8. Repris du concours. Il faut bien interpréter l'intégrale de la limite. Pour $t > 0$ fixé, on calcule la limite quand $x \to 0$ qui vaut $\frac{\sin(t)}{t}$. Ainsi l'intégrale demandée vaut $\frac{\pi}{2}$ car $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$