Exercice 1

1. Par définition, f possède une limite finie en $+\infty$ ssi I converge. Or $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et par continuité sur $[0,1]$ (qui est fermé), f possède bien une limite finie en $+\infty$

   (a) On pose $\varphi : (x,\theta) \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times [0, \frac{\pi}{4}]$. On veut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   Les régularités sont faciles (quotient + composition, puis composition). De plus, pour $(x,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \frac{\pi}{4}]$, $|\varphi(x,\theta)| \leqslant 1$ et 1 est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ (continue sur un segment).
   Ainsi g est bien continue.

   (b) Fait en TD. On trouve une fonction croissante jusqu'à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ puis décroissante, et $0 \leqslant h \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

   (c) On veut cette fois appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
   — Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\theta \mapsto \varphi(x,\theta)$ est continue et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ d'après 2a.
   — Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $x \mapsto \varphi(x,\theta)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ par composition (et produit par une constante), de dérivée $x \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\theta) = -\frac{2x}{\cos^2\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)$.
   — Pour $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, $\theta \mapsto -\frac{2x}{\cos^2\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par quotients dont le dénominateur ne s'annule pas, composition de fonctions continues et produit.
   — $(x,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \frac{\pi}{4}]$, $|-\frac{2x}{\cos^2\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)| \leqslant \frac{2}{\cos^2\theta}|xe^{-x^2}|$ car $\frac{1}{\cos^2\theta} \geqslant 1$ et exp est croissante. De plus, $\frac{1}{\cos^2\theta} \leqslant 2$ donc $|-\frac{2x}{\cos^2\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ qui est une constante intégrable sur le segment $[0, \frac{\pi}{4}]$.

   D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $g' : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta$.

   (d) Posons $u = \tan\theta$ qui est un changement de variable bijectif $[0, \frac{\pi}{4}] \to [0,1]$ et $\mathcal{C}^1$. De plus $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + u^2$
   Alors $\mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$ et donc pour $x \geqslant 0$, $g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+u^2)}\mathrm{d}u = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xu)^2}x\mathrm{d}u$. Pour $x > 0$, on pose alors $v = xu$ et donc $\mathrm{d}v = x\mathrm{d}u$ et alors $\int_0^1 e^{-(xu)^2}x\mathrm{d}u = \int_0^x e^{-v^2}\mathrm{d}v$. Remarquons que l'égalité reste vraie même pour $x = 0$ même si le changement de variable n'est plus bijectif (on applique en fait le théorème de première année).

> **Théorème 1**
> Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b], I)$ et $f :\in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Alors
> $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(v)\mathrm{d}v = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

   Où ici $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,x] \\ u & \mapsto & xu \end{array}\right.$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ est bien continue sur $[0,x]$, $\varphi' : u \mapsto x$. Lire l'égalité de droite à gauche.
   Reprenons. f est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0. Ainsi ψ est bien dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par somme et pour $x \in \mathbb{R}^+$
   $$\psi'(x) = 2f'(x)f(x) + g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t - 2\int_0^x e^{-v^2}\mathrm{d}v = 0$$
   Ainsi ψ est constante sur $\mathbb{R}^+$.
   Si on ne traitait pas le cas $x = 0$ pour la dérivée de g, on peut conclure en disant que ψ est constante sur $]0, +\infty[$ et continue en 0 donc constante sur $[0, +\infty[$ (car sa valeur en 0 est sa limite en 0 ie sa limite en 0^+ (ce qui est vrai quand on sait déjà que la limite en 0 existe).

2. (a) On a déjà vu que pour $x \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $0 \leqslant \varphi(x,\theta) \leqslant e^{-x^2}$ et on applique la croissante de l'intégrale (les bornes vérifient bien $0 \leqslant \frac{\pi}{4}$). Les fonctions à intégrer ne dépendent pas de θ...

(b) Théorème d'encadrement !
Il nous faut déterminer la valeur de la fonction constante ψ. Pour cela, on évalue $\psi(0) = f(0)^2 + g(0) = 0 + \frac{\pi}{4}$.
Ainsi $\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{4}$ et donc $f(x)^2 \underset{+\infty}{\to} \frac{\pi}{4}$. Comme de plus f est positive sur $\mathbb{R}^+$ (encore la croissance de l'intégrale, avec les bornes qui vérifient $0 \leqslant x$), on en déduit que $f(x) \underset{+\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(c) Simple changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$ dans l'intégrale I. Il s'agit juste de vérifier qu'il est bijectif et $\mathcal{C}^1$ (ce qui est évident).
On obtient $J = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$