Exercice 1
Trouver les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+4z^2=1$ et parallèles au plan d'équation $x+2y+z=0$.

Exercice 2
Étudier la position locale de S définie par $z\cos x - y\sin x = 0$ par rapport à son plan tangent en l'origine

Exercice 3
Montrer que la surface $\left\{\begin{array}{l} x = 3u+v \\ y = 2u^2+2uv \\ z = u^3 v \end{array}\right.$ $,(u,v)\in\mathbb{R}^2$ est réglée.

Exercice 4
Soit $\mathcal{S}$ la surface définie par les équations paramétriques

$$x = u^2 \quad , \quad y = uv \quad , \quad z = u - v$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une surface réglée.
Donner le plan tangent en un point régulier.

Exercice 5
Soit $a>0$, et soit Γ l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=a^2$ et du cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2-ax=0$.

1. Déterminer une paramétrisation de Γ.
2. Quel est la tangente à Γ en l'un de ses points ?
3. Soit P le point d'intersection de la tangente à Γ en un point M avec le plan $(x0y)$. Déterminer le lieu de P lorsque M parcourt Γ.

Exercice 6
Identifier dans $\mathbb{R}^2$ la courbe Γ d'équation $\begin{cases} x^2+y^2-2y-3=0 \\ 2y-2z+3=0 \end{cases}$

Donner l'équation de la surface engendrée par la rotation de cette courbe autour de l'axe (Oz).

Exercice 7
Soit S l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

où a , b et c sont trois réels strictement positifs.

Déterminer les plans tangents à S qui recoupent les axes Ox , Oy et Oz en trois points A, B et C tels que $OA=OB=OC$.

Exercice 8
Banque PT 2000

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

On désigne par $a>0$ une constante réelle donnée, et par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ respectivement la courbe et la surface de représentations paramétriques

$$\mathcal{C} : \left\{\begin{array}{lcc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \theta & \longmapsto & P(\theta)=(a\cos\theta, a\sin\theta, a\theta) \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S} : \left\{\begin{array}{lcc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,u) & \longmapsto & M(\theta,u)=(a\cos\theta-u\sin\theta, a\sin\theta+u\cos\theta, a\theta+u) \end{array}\right.$$

On pose $\overrightarrow{u_\theta}=\cos\theta\vec{\imath}+\sin\theta\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{v_\theta}=-\sin\theta\vec{\imath}+\cos\theta\vec{\jmath}$.

1. Préciser les points réguliers de $\mathcal{S}$.
   Donner une équation du plan tangent à S en un point régulier.
2. $\mathcal{S}$ est-elle une surface réglée ?
3. $\mathcal{S}$ est-elle engendrée par les tangentes à $\mathcal{C}$?

Exercice 9
Banque PT 1997

Soit θ un réel.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice à coefficients réels

$$\begin{pmatrix} 2\operatorname{sh}\theta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   et en déduire ses valeurs propres
   A est-elle diagonalisable ?
   Donner une base orthonormée de vecteurs propres.

2. Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}_0 = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la surface $\mathcal{S}'$ d'équation

$$2\operatorname{sh}\theta x^2 + y^2 + 2xz - 2y = 0.$$

   Montrer que le point Ω de coordonnées $(0, 1, 0)$ dans le repère est centre de symétrie.

3. Soit $\mathcal{R}_1$ le repère orthonormé dans lequel I'équation de $\mathcal{S}$ se ramène à

$$X^2 + e^{\theta}Y^2 - e^{-\theta}Z^2 = 1.$$

   Expliciter les formules donnant les nouvelles coordonnées (X, Y, Z) en fonction des anciennes (x, y, z).

4. Dans le repère $\mathcal{R}_1$, étudier la nature de l'intersection de $\mathcal{S}$ avec les plans d'équations $X = h$ ($h \in \mathbb{R}$) puis $Z = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

5. Dans le cas particulier $\theta = \ln 2$, tracer sur des figures planes différentes les intersections correspondant à $h = 1$ et $h = 3$ dans le plan $(Y\Omega Z)$ puis $k = 0$ dans le plan $(X\Omega Y)$.