

Le but de ce TD est d'étudier différentes méthodes d'interpolation par des courbes "splines"

I Paraboles

Soient A, B deux points d'abscisses distinctes. On cherche les coefficients a, b, c d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A et B . Cette condition étant insuffisante pour déterminer une unique parabole, on impose en plus que la pente de la tangente en A soit $p \in \mathbb{R}$ fixé.

1.1 Déterminer les coefficients

Ecrire en fonction des coordonnées de A et B et de p le système linéaire dont (a, b, c) est une solution.

Créer ensuite une fonction `coefficients(A, B, p)` qui prend deux listes A, B de longueur 2 et p un nombre comme arguments et retourne le triplet (a, b, c) .

On pourra utiliser

```
np.linalg.solve(M, Y)
```

qui retourne la seule colonne X telle que $MX = Y$ où M est une matrice carrée et Y la colonne second membre.

1.2 Tracé

Ecrire une fonction `evaluate(L, x)` qui retourne la valeur de $P(x)$ où P est le polynôme dont les coefficients sont donnés par la liste L ie $P(X) = \sum_{i=0}^{\text{len}(L)-1} L[i]X^i$.

Créer ensuite une fonction `parabole(A, B, p)` qui trace la parabole cherchée dans le préambule. A , et B ont la même signification que précédemment.

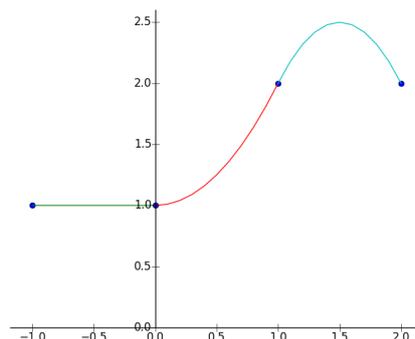
II Splines quadratiques

2.1 Présentation du problème

On se donne maintenant une liste de points $L = [A_0, \dots, A_n]$ (ou un point est toujours une liste de longueur 2) ainsi qu'un nombre p . On suppose que les points sont triés par abscisses strictement croissantes.

On souhaite tracer la courbe suivante :

- Entre A_0 et A_1 il s'agit de la parabole de la partie précédente.
- Pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la courbe entre A_i et A_{i+1} est une parabole passant par A_i et A_{i+1} telle que la pente de la tangente en A_i soit la même que la pente en A_i de la courbe précédente.



2.2 Tracé

Il nous manque un outil technique. Créer une fonction `pente(P, x)` qui retourne la valeur de $P'(x)$ où P est encore représenté par une liste de coefficients.

Pour créer la liste de points L pour le test, on prendra n points sur une courbe représentative de référence, équirépartis (par exemple $\sin, x \mapsto \arctan(x) + \sin(x) \dots$). Faire de ce processus de création une fonction peut permettre de changer facilement la valeur de n .

Tracer ensuite la courbe demandée pour différentes valeurs de p . On pourra essayer d'imposer la couleur de tracé des arcs de paraboles.

III Splines cubiques

L'idée est exactement la même que précédemment, mais cette fois on cherche des courbes d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et on impose en plus la valeur de la dérivée seconde en chaque point. Pour le tracé, on imposera que la dérivée seconde au premier point est nulle. Par essais successifs (en changeant la pente à l'origine), on tentera d'obtenir une dérivée seconde au dernier point (A_n , pas le dernier point de raccord) la plus proche possible de 0.

Proposer un algorithme de calcul approché de la pente à l'origine pour que la dérivée seconde finale soit nulle.