Exercice 1
On note $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution de $\mathcal{D}$ autour de (Oz).

Donner également une représentation paramétrique.

Exercice 2
Soit $a > 0$. On considère la courbe définie par : $x > 0$ et $x^2 - y^2 = a^2$.

1. Déterminer un paramétrage de cette courbe.
2. Déterminer un paramétrage de la normale en tout point M de la courbe.
3. On note $\mathcal{C}_M$ le cercle tangent à la courbe en M et centrée sur l'axe (Oy). Donner une équation de $\mathcal{C}_M$.
4. Soit $A(a\sqrt{2}, 0)$. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}_M$ passant par A sont orthogonales.

Exercice 3
Soit $\Gamma : y = ax^2$. Déterminer l'équation de la normale en un point M d'abscisse $t \neq 0$.

Déterminer l'ensemble γ des points ou se coupent deux normales à Γ.

Déterminer l'enveloppe des normales à γ.

Exercice 4
Caractériser et tracer la conique $(C) : y^2 - x^2 = 1$.

Donner une paramétrisation $(x(t), y(t))$ de la courbe à l'aide des fonctions ch et sh.

Déterminer une équation de la famille des normales (H) à (C). Déterminer la développée (γ) de (C) et tracer après étude.

Exercice 5
Montrer que $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ est non bornée.

Trouver les points critiques et préciser leurs natures si possible. Montrer que le point $(0, 0)$ est un point col, c'est à dire qu'il n'est ni minimum ni maximum local.

Calculer $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y)$.

Exercice 6

1. Soit $b \neq 0$. Etude de la courbe paramétrée $(x = \cos(3t), y = b\sin^3(t))$ sur $[-\pi, \pi]$. On montrera que l'on peut réduire l'intervalle d'étude par des symétries à préciser.
2. On choisit $b = 1$. Déterminer les points doubles et un vecteur directeur de la tangente en ces points.
3. Donner un développement limité de x et y en 0. Que peut-on en déduire ? Donner l'allure de la courbe au voisinage de l'origine.
4. Dans le cas général, comparer les courbes obtenues pour b et $-b$. Comment déduit-on toutes les courbes du cas $b = 1$?

Exercice 7
Etude de la courbe paramétrée $(x = \cos 3t, y = \sin 3t)$.

Exercice 8
Déterminer les points critiques de $f(x, y) = \frac{1}{5}(x^4 + y^4 + xy)$

Exercice 9
On note r une rotation de $\mathbb{R}^3$, d'axe D, distincte de l'identité et s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P.

Montrer que si $P = D^\perp$ alors $s \circ r = r \circ s$.

Etudier la réciproque.

Exercice 10

1. Représenter la courbe C paramétrée par $x(t) = 2t^2$, $y(t) = 2t$.
2. Déterminer une équation de la tangente T_t au point de paramètre t.
3. Trouver les conditions sur t et u pour que T_t et T_u soient perpendiculaires.
4. Déterminer le lieu des points d'intersection des tangentes perpendiculaires (appelé podaire de C).

Exercice 11

1. Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ la nature de la courbe plane d'équation $(1 + m)(x^2 + y^2) - 2mxy = m$.
2. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles $\sum \left(2 + (an + b)\ln\frac{n+2}{n+4}\right)$ converge.

Exercice 12
On donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $\sigma = ab + bc + ac$, $s = a + b + c$.

1. Montrer que M est orthogonale ssi $\sigma = 0$ et $s \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi $\sigma = 0$ et $s = 1$.
3. $(\star)$ Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$

Exercice 13
Etude de la conique d'équation $2x^2 + 3xy + y^2 - 5x - 6y = 0$.

Exercice 14
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit un cercle $\mathcal{C}_t$ de rayon a tangent à (Ox) en un point T d'abscisse t. Soit M le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}_t$ avec l'autre tangente à $\mathcal{C}_t$ issue de O.

1. Tracer la figure.

2. Déterminer les coordonnées de M.
3. Etudier la trajectoire.

Exercice 15
On considère l'ensemble E d'équation $x^2 - y^2 = 1$ dans le plan.

1. Tracer les asymptotes à cette courbes.
2. Tracer la courbe.
3. Déterminer une paramétrisation $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ à l'aide des fonctions ch et sh.
4. Déterminer une équation cartésienne d'une normale à la courbe au point de paramètre t.
5. En déduire la développée de $\gamma(t)$.
6. Faire l'étude et tracer la développée de $\gamma(t)$.

Exercice 16
On considère la courbe paramétrée par $M(t) = \left(-\frac{1}{t^2}, \int t\right)$.

1. Etude et tracé.
2. Donner les équations de la tangente et de la normale en un point de paramètre t.
3. Montrer qu'il existe deux droites et deux seulement qui sont à la fois tangentes et normales à la courbe.

Exercice 17
Soient a, b deux réels non nuls. Dans le plan affine euclidien usuel, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la droite D d'équation

$$D : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

et un point M de coordonnées $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer les coordonnées (x_1, y_1) du symétrique M_1 de M par rapport à D.
2. Donner de même $M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$, respectivement symétriques de M par rapport à (Ox) et (Oy).
3. Déterminer le lieu des points M pour lesquels M_1, M_2, M_3 sont alignés et donner la nature de cet ensemble.

Exercice 18
Dans l'espace munit d'une repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère

$$C_1 : \begin{cases} z = x^2 - 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{et } C_2 : \begin{cases} z = x^2 + 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

. Déterminer une équation cartésienne du lieu S des milieux des segments $[M_1 M_2]$ où M_1 et M_2 parcourent C_1 et C_2 respectivement.

Exercice 19
Dans le plan affine euclidien usuel, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$D_t : x \sin(t) - x \cos(t) + \sin^3(t) = 0$$

1. Déterminer l'enveloppe Γ de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$.
2. Déterminer et étudier les points stationnaires de Γ.
3. Représenter Γ.

Exercice 20

Soit $A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 12 \\ 4 & -12 & 3 \end{pmatrix}$

1. Quelle transformation géométrique r de $\mathbb{R}^3$ A représente-t-elle ?
2. Donner l'image par r du plan P d'équation $x - y + 4z = 1$.