Archives d'Oraux des élèves de PT du lycée Blaise Pascal

Ex 1 Kevin Phan 2016 – Maths II

La trajectoire du point $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est décrite par

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = 2z \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$$

La trajectoire de M est dite bornée si et seulement si $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ est bornée. On donne $M(0) = (a, b, c)$.
Que dire de la trajectoire de M
1) lorsque $t \in [0, +\infty[$?
2) lorsque $t \in \mathbb{R}$?
Examinateur très gentil, cela m'a permis de me sentir plutôt à l'aise lors de l'interrogation. Il n'intervenait que lorsque je faisais une étourderie.

Partie Info
Le fichier `num067_meteo.txt` qui se trouve dans le répertoire `data` contient les températures de la ville de Paris en 2013.

1) Créer une liste de toutes les températures.
2) Afficher la température minimale et la température maximale, ainsi que les numéros de jours correspondant.
3) Afficher le graphique des températures en fonction du temps
4) Afficher la température moyenne le long de l'année.
5) Afficher le nombre de jours pour lesquels la température est supérieure à 20°C.
6) Trouver toutes les périodes de sept jours pour lesquelles l'écart de température est d'au moins 12°C.

Ex 2 Romain Delaforge 2016 – Maths II

On définit le plan F par l'équation $x + 2y + 2z = 0$.
Soit p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F.

1) Déterminer une base orthonormale de F.
La compléter en une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner les matrices de p et de s dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Ces matrices sont-elles orthogonales ?
3) Donner la matrice de p et de s dans la base de $\mathbb{R}^3$ définie à la question **1)**.

Partie informatique
On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = \frac{1}{x},\ u_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}},\ u_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}, \cdots$$

1) Calculer les 20 premiers termes de la suite (u_n) pour un $x \in \mathbb{R}^*$ donné.
2) Définir la fonction fraction qui renvoie le quotient et le dénominateur de u_n. (je suppose que x est une fraction ?)

Ex 3 Romain Delaforge 2016 – Maths I

Soit $a \in]0, \pi[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \begin{cases} [0, \pi] \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos(nx) - \cos(na)}{\cos(x) - \cos(a)} \end{cases}$

1) Montrer que f_n est prolongeable par continuité en a.
2) Simplifier $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$.
3) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nx) - \cos(na)}{\cos(x) - \cos(a)} dx$.
Question du jury : est-ce une intégrale généralisée ?
Exprimer $I_{n+1} + I_{n-1}$ en fonctionde I_n et $\cos(a)$.
Calculer I_n

Question de cours : les événements en probabilités.
Sujet volontairement vague pour permettre au candidat de traiter le sujet de la manière qu'il le souhaite.

Ex 4 Kevin Lerun 2015

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ une famille infinie de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p (?).
Soit S_m une variable aléatoire telle que

$$S_m = \begin{cases} \inf(\{n \in \mathbb{N}^* \mid \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m\}) \text{ s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit Y_n une variable aléatoire telle que $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1) Montrer que X_n et Y_{n-1} sont indépendantes.

2) Donner la loi de S_1. Que vaut $\mathbb{P}(S_1 = +\infty)$?

3) *Question intermédiaire permettant de répondre à la question 4 dont je ne me souviens plus.*

4) Donner la loi de S_m. Que vaut $\mathbb{P}(S_m = +\infty)$?

5) *Question finale dont je ne me souviens plus.*

Ex 5 Kevin Lerun 2015 – Question de cours

1) Énoncez la **règle de d'Alembert** sur les séries numériques.

2) Donner deux exemples de séries entières dont la convergence n'est pas décidable à l'aide de la règle de d'Alembert ; une série convergente et une divergente.

Ex 6 Théophile Niérat 2014

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver les $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ solutions de

$$X + \mathrm{tr}(X)A = 0.$$

Ex 7 Pierre-Baptiste Maddens 2013 (Maths II)

Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \left(1 - x^2\right) y'' - 4xy' - 2y = 0$$

1) Trouver une solution développable en série entière, en déduire le rayon de convergence.

2) En déduire toutes les solutions sur les bons intervalles.

3) Etudier les éventuels recollements.

Ex 8 Pierre-Baptiste Maddens 2013 (Mines)

Ex 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Trouver une valeur propre évidente de M.

2) En déduire sa multiplicité à l'aide du théorème du rang.

3) M est-elle diagonalisable ?

Question subsidiaire que peut-on dire dans le cas général d'un matrice $n \times n$.

Ex 2

Soit l'arc paramétré

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t. \end{cases}, \quad t \in]0, \pi[$$

1) Étudier et tracer la courbe.

2) Calculer la longueur de la courbe entre les 2 points de rebroussement.

Ex 9 Arnaud MORISSON 2013 (ENS, Mines-Ponts)

1) Montrer que $\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi$.

2) En déduire que

$$\left(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi\right)\left(b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi\right) = a^2 b^2 + \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2}{4} \sin^2 2\varphi.$$

3) Soit $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $L(\mathcal{E})$ la longueur du contour de la courbe $\mathcal{E}$.
Montrer que

$$L(\mathcal{E}) = 4\left(\int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{\pi/4} \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right)$$

4) oublié...

Question de cours DSE de sh et rayon de convergence.

Ex 10 Cyriac Azefack 2014

Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ s'annulant en 0.

1) Soit f un élément de E, montrer que $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

2) Soit $T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$, montrer que T est un endomorphisme de E.

3) Étudier les éléments propre de T.

Ex 11 Oral II Matthieu Lafond 2013

Soit $a > 1$. Etude de la suite définie par $u_{n+1} = au_n - \frac{1}{n+1}$, $u_0 = 1$.
On pose $v_n = \frac{u_n}{a^n}$.

1) Etudier la convergence de $\left(\frac{1}{na^n}\right)_{n \geqslant 1}$.

2) A partir de $\sum (-1)^k t^k$, montrer que

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1 + t}\mathrm{d}t.$$

3) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na^n}$

4) Etudier la convergence de la suite (v_n).

5) Etudier la convergence de la suite (u_n).

Ex 12 Oral I Matthieu Lafond 2013

Soit la courbe

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \mathrm{P}(t) = \left(t^4 + t^2, t^2 + 1, t^2 + t\right). \end{array} \right.$$

1) Si $t \neq t'$, montrer que $\mathrm{P}(t) \neq \mathrm{P}(t')$.

2) Montrer que $\mathscr{C}$, ensemble des points $\mathrm{P}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, n'est pas une courbe plane.

3) Soit $\mathcal{H} : ax + by + cz + d = 0$ un plan affine.
Montrer que les points $(\mathrm{P}(t_i))_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ sont sur le plan $\mathcal{H}$ ssi les t_i sont racines du polynôme

$$\mathrm{Q}(t) = at^4 + (a + b + c)t^2 + ct + b + d.$$

4) Montrer que les points $\mathrm{P}(t_i)$ sont coplanaires ssi $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$.
Questions de cours : définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et énoncé du théorème de changement de variable dans une intégrale.

Ex 13 Maths Pierre-Baptiste MADDENS 2012

Soient $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{32}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{23}(\mathbb{R})$ telles que le produit matriciel AB soit semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $(\mathrm{AB})^2 = 9\mathrm{AB}$.

2) En déduire que $\mathrm{rg}(\mathrm{BA}) \leqslant 2$. Montrer que BA est inversible.

3) Montrer que BA annule le polynôme $\mathrm{X}^3 - 9\mathrm{X}^2$. En déduire BA.

Indication Il est fondamental de savoir que $\mathrm{rg}(\mathrm{CD}) \leqslant \mathrm{rg}\,\mathrm{C}$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{CD}) \leqslant \mathrm{rg}\,\mathrm{D}$.

Ex 14 Pierre-Baptiste MADDENS 2012

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

1) A l'aide d'un développement limité en 0, montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre constant dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Pour cela on déterminera ces coefficients.

2) Montrer que f est développable en série entière, déterminer le rayon de convergence.

Ex 15 Maths ENS Pascal Neveu 2012

Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Soit φ l'application de E^2 définie par

$$\varphi : (g, h) \mapsto \int_0^1 (gh + g'h')$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) Soit $\mathrm{W} = \{f \in \mathrm{E} | f'' \text{ existe et } f'' = f\}$.
Montrer que W est un sous-espace vectoriel de dimension finie et en donner une base.

3) Soit $\mathrm{V} = \{f \in \mathrm{E} | f(0) = f(1) = 0\}$.
Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux dans E.
Déterminer la projection orthogonale de $f \in \mathrm{E}$ sur W.

4) Soit $f \in \mathrm{E}$.
Déterminer $\inf\limits_{g \in \mathrm{V}} \left(\int_0^1 \left((f(t) - g(t))^2 + (f'(t) - g'(t))^2 \right) \mathrm{d}t \right)$.

5) Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on définit

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta} = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}.$$

Calculer

$$\inf_{f \in \mathrm{E}_{\alpha,\beta}} \left(\int_0^1 \left(f^2 + f'^2\right) \right).$$

Question de cours Critère spécial des séries alternées, définition d'une fonction $\mathscr{C}^0_{pm}$.

Ex 16 Maths ENSAM Pascal Neveu 2012

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ défini par

$$f(\mathrm{P}) = (1 + \mathrm{X})^2\mathrm{P}'' + a(\mathrm{X} - 1)\mathrm{P}' + \mathrm{P}$$

1) Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

2) Pour quelles valeurs de a, f est-il diagonalisable ?

3) Dans le cas où $a = 0$, déterminer l'image par f^n du polynôme $b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d$.

Ex 17 Maths ENSAM Jeremy Breval 2011

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 nx} = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}.$$

2) En déduire sa valeur. (‹‹en déduire›› = mauvaise formulation !)

3) (super hors-programme !!)
Soit f continue sur $[0,\pi]$, déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+\cos^2 nx}.$$

Indication utiliser le changement de variable $t = \tan x$ et admettre (sic !) une théorème du genre $\lim \int = \int \lim$.

Ex 18 Petites Mines Steve Cavecin 2010

Ex1 Soit $f : t \mapsto t^2$ sur $[0, 2\pi[$ et f 2π-périodique.

1) Représentation de f.

2) Développer f en série de Fourier (HP).
(piège en 0 dans lequel est tombé Steve)

3) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ex2
Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ donnée *(Steve a oublié la forme exacte).*
Montrer que l'endomorphisme f canoniquement associé à A est un automorphisme orthogonal.
Déterminer la nature de f *(on trouve une rotation)*
"Réduire" A c'est-à-dire donner une base orthonormale dans laquelle la matrice s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

Ex 19 Maths ENSAM Steve Cavecin 2010

Soit u et v deux endomorphismes vérifiant $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$.

1) Montrer que u et v sont des projecteurs de même noyau.

2) Montrer la réciproque.
Indication : si p est un projecteur, utiliser $x - p(x) \in \ker p$.
Question de cours : montrer que $\mathrm{Im}\, p$ et $\ker p$ sont supplémentaires.

Ex 20 (Maple mais toujours d'actualité en maths) ENSAM Steve Cavecin 2010

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^4 - y^4. \end{array} \right.$

1) Représentation graphique de f.

2) Montrer que f admet 3 points critiques. Quels sont les extremums locaux, quelle est leur nature ?
Le hessien ne fonctionne pas on doit faire un DL après avoir effectué un changement d'ordonnée $x = X - 1$). L'examinateur n'aime pas l'expression point selle mais préfère point col.

3) Y a-t-il d'autres extremums locaux ? *(flou, change-t-on l'ensemble de définition de f ?)*

Ex 21 Maths ENSAM Marion Morel 2010

Soit $P(X) = X^3 - X + 1$, (a,b,c) ses racines.

1) Montrez que les racines a, b et c sont distinctes

2) On pose $S_n = a^n + b^n + c^n$.
Exprimer S_n pour $0 \leqslant n \leqslant 3$.

3) Résoudre $\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=2 \\ a^2x+b^2y+c^2z=-3 \end{array} \right.$

Ex 22 ENS Cachan Marion Morel 2010 (19/20)

Soit $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1) Calculer J_1, J_0.

2) Déterminer une relation entre J_n et J_{n-2}.

3) En déduire l'expression de J_n en distinguant les cas n pair et n impair.

4) Montrer que $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty}$ *un truc en p!, avec du 2^{4p}….*

Je n'ai pas eu le temps de le faire où il fallait encadrer $\frac{J_{p+1}}{J_p}$ entre 1 et $\frac{J_{p-1}}{J_p}$ puis théorème d'encadrement, et ensuite on remplace…

Au bout de 30 min, j'avais fait 1, 2 et 3. Plutôt contente.
J'enchaîne les questions, elle acquiesce. Elle me dira quoi faire pour la dernière question, ajoutant que c'était pas facile.
Ayant lu auparavant les rapports de jury des années précédentes, j'ai suivi le conseil de demander, pour la première question, si je pouvais simplement donner les résultats sans les calculs. Ca m'a fait gagné du temps, même si j'ai finalement dû recalculer J_0 par erreur de calcul pendant la préparation.

Tableau effacé, on enchaîne sur la question de cours.
« donner moi toutes les caractéristiques de la trace » puis « Conditions de trigonalisabilité et diagonalisabilité d'une matrice dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ » et enfin « Formule de Taylor »
J'enchaîne sans trop de problème, elle achèvera l'entretien par un « très bien, vous avez réponse à tout ». Merci les Maths.

Ex 23 Petites Mines Etienne Gabella 2010

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\mathrm{A}^3 = -\mathrm{A}$.

1) Montrer qu'elle n'est pas de rang 3.

2) Démontrer que lorsque $\operatorname{rg} \mathrm{A} = 1$, $\mathrm{A}^2 = \operatorname{tr} \mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$.

Question de cours : développante, calcul de la cas d'un cercle.

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} \mathrm{d}t$.

Ex 24 ORAL ENS Cachan Etienne Gabella 2010

$\mathrm{M}(x, y, z, t) =$ une matrice 4×4 qui comporte $4x$, $4y$, $4z$ et $4t$.(brouillons supprimés par l'examinateur donc je ne me rappelle plus ou exactement étaient ces coefficients)
Soit $\mathrm{A} = \mathrm{M}(1, 0, 0, 0)$, $\mathrm{B} = \mathrm{M}(0, 1, 0, 0)$ $\mathrm{C} = \mathrm{M}(0, 0, 1, 0)$, $\mathrm{D} = \mathrm{M}(0, 0, 0, 1)$.

1) Déterminer M en fonction de $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ (ou I_4).

2) Montrer que les matrices M forment un espace vectoriel.
Trouver une base de cet espace en fonction de A et I_4.
L'astuce (que je n'ai pas trouvée..) était de calculer A^2, A^3, qui pouvaient s'écrire en fonction des matrices $\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$.

3) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Trouver ses vecteurs propres.
J'ai honte mais je me suis trompé dans le calcul du polynôme caractéristique. L'examinatrice m'a alors donné le résultat : $\mathrm{X}^4 - 1$.
J'ai d'abord dit qu'il n'y avait que 1 comme racine.. Puis j'ai dit, après hésitations, qu'il y avait i et -i, et enfin -1....

4) Prouver que M est diagonalisable et en déduire son déterminant.
Cette question fut guidée, j'ai abouti grace à beaucoup d'aide.
Question de cours. théorème de Dirichlet puis fonction $\mathscr{C}^1$ par morceaux. *Oublié, donc j'ai du faire des graphes de fonction $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^1$ par morceaux etc...(avec l'aide de l'examinatrice..)*

Ex 25 Oraux Télécom SudParis (pour ensuite passer les vrais oraux) Etienne Gabella 2010.

J'ai eu un exercice de maths directement au tableau pendant 30 minutes. Il s'agissait de calculer une intégrale avec des complexes, mais il fallait s'aider des séries entières.. Puis j'ai eu un exercice d'algèbre. Les 2 exercices furent assez guidés, je montrais quand je pouvais que je connaissais mon cours.

Ex 26 Définition implicite d'une suite (Nicolas MESSIAS, oral ENSAM, 2009)

Montrer que l'équation $x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1$ a, si $n \geqslant 2$, une unique solution dans $]0, 1[$. On note x_n cette solution. Comparer x_{n+1} et x_n . Montrer que (x_n) converge, préciser la limite.

Ex 27 ORAL ENSAM Maths au tableau, Nicolas Cornu 2009

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (\operatorname{ch} n)\, x^{3n+1}$.

1) Trouver son rayon de convergence.

2) Exprimer cette série entière à l'aide de fonctions usuelles.

Ex 28 F. Wesolowski, au tableau, 2009.

On pose $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^2}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{2t}{t-1} \end{cases}$

Étudier la courbe, les asymptotes et les éventuels points doubles.
(peut-être une erreur d'énoncé car on trouve une hyperbole)

Ex 29 Agathe Séguillon, 2008.

Soient $\mathrm{M}_i\big|_{y_i}^{x_i}$ trois points du plan et $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ formant un vrai triangle.

1) Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{ les points } \mathrm{M}_i \text{ sont alignés.}$$

2) On pose $\overrightarrow{\mathrm{BA}'} = a\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BB}'} = b\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}'} = c\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ avec a, b, c dans $[0, 1]$.
Exprimer l'alignement entre $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ en fonction de a, b, c.

3) Démontrer une double égalité entre 3 quotients, je ne me rappelle plus exactement laquelle mais cela revenait à tous réexprimer en fonction du repère, pour retomber sur l'égalité obtenue en 2) en développant le déterminant (???).

Ex 30 Matthieu Zalewski, 2008.

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $x \in \mathbb{R}$.
On pose

$$a = \sin\theta e^{i\theta},\ \mathrm{Z} = \frac{a}{1 - ax} \text{ et } f(x) = \arctan(x - \operatorname{cotan}\theta).$$

1) Calculer la partie imaginaire de Z. L'exprimer en fonction de $\operatorname{cotan}\theta$.

2) Calculer $f'(x)$. En déduire un développement en série entière de f et déterminer son rayon de convergence.

Ex 31 **Alexandre Maton, Maple mais faisable à la main, 2008.**
Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\frac{\ln\left(n^2+n+2\right)}{\ln\left(n^2+n+1\right)}\right)^{\alpha} - 1.$$

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de terme général u_n converge-t-elle ?

Ex 32 **Alexandre Maton, 2008.**
Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ telles que

$$f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$$

1) Montrer que l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.

2) Démontrer que l'on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}.$$

(1 heure de calculs de la part d'Alexandre M pour retrouver l'énoncé correct !!!)

3) Montrer que si g est nilpotente, alors g est l'endomorphisme nul.

4) Je n'ai pas traité la dernière question.

Ex 33 **??, 2008**
Soit $\mathcal{K} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \text{ et } x+y+z=1\}$. Calculer $\displaystyle\max_{(x,y,z)\in\mathcal{K}} xyz$.
Montrer que pour x, y, z positifs, on a $(xyz)^{1/3} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$. Cas d'égalité ?

– Archives provenant d'autres classes –

Oraux 2015

Planche 2015-1 – Oral Minettes – Rémi Dionnet :

1) Donner la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\, dt$.

2) Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1}$.

3) Donner la transformation de $\mathbb{R}^3$ associée à la matrice $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Planche 2015-2 – Oral ENSSAT – Antoine Chandy :

Partie 1

1) Énoncer le théorème de comparaison série-intégrale.

2) Étudier la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln n}$.

3) Démontrer l'encadrement $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leqslant \frac{1}{k \ln k}$.

4) En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$.

5) Donner un équivalent de cette somme.

Partie 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2x+z, x+y+z, -2x-z)$.

1) Donner la matrice A associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. A est-elle inversible ?

2) Donner les valeurs propres de f.

3) Donner les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{A}^n$.

5) Donner une base de $\mathrm{im}(f)$. Quelle est la nature géométrique de f ?

Planche 2015-3 – Oral ENSSAT – Elie Nataf :

Partie 1

1) Définir ce qu'est une norme.
Donner une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) On note $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.
Donner l'ensemble de définition D de f.

3) Représenter graphiquement D et la surface d'équation $z = f(x,y)$.

4) Justifier que f admet des dérivées partielles sur l'intérieur de D et les calculer.

5) Montrer que f est solution d'une équation aux dérivées partielles en calculant : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial x}$.

Partie 2

Soient a, b et c des réels tels que $a \leqslant b \leqslant c$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Donner les conditions sur a, b et c pour que A soit diagonalisable.

Planche 2015-4 – Oral Maths II – Jean-François Jung :

Jury sympathique et agréable mais très très chaud dans la salle.

1) Soit (E) l'équation différentielle $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$

a) Pour t dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on note $\varphi(t)=\tan t$ et $z=y\circ\varphi$.
Montrer que si y est solution de (E), alors z est solution d'une équation différentielle homogène du second ordre notée (E′).

b) Résoudre (E′).

c) Montrer que $\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

d) En déduire $y(x)$.

2) Python.
Soient a et n deux entiers. On dit que n est puissance finale de a quand les derniers chiffres de a^n sont ceux de n.
Par exemple, 36 est puissance finale de 2 car $2^{36}=68719476736$.

a) Ecrire une fonction LF suivant une logique booléenne, qui prend pour paramètres a et n, et qui indique si n est une puissance finale de a.

Planche 2015-5 – Oral Maths II – Kevin Tsogbe :

1) a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suité définie par $u_0=1$, $u_1=0$, $u_2=\frac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+3)u_{n+3}=(n+2)u_{n+2}+u_{n+1}-u_n$.
Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[-1,1]$.

b) Soit $f : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$.
Montrer que f est définie sur $]-1,1[$.
Trouver $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$ tel que $(ax^2+bx+c)f(x)+(dx+e)f'(x)=0$.

c) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

2) Python.

Planche 2015-6 – Oral Minettes – Gurvan Huet :

1) Questions de cours :
- Fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- Produit de Cauchy

2) Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ donnée (?).
Prouver la linéarité de f.
Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{im} f$. Donner une équation de $\operatorname{im} f$.

3) Exercice 2
Soit la courbe C de l'espace d'équations $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 & \textit{Coefficients à revoir, sans doute} \\ x=y \end{cases}$
Déterminer une équation de la surface obtenue par rotation de C autour de l'axe (Oz).

Planche 2015-7 – Oral Maths II – Yannick Yasothan :

Le jury est gentil, aide quand on a du mal. Mais il insiste sur la rapidité.

1) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues réelles définies sur $[0,1]$.
On note $\|f\|_2=\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}$ et $\mathrm{T}(f)(x)=(1-x)\int_0^x tf(t)\,dt+x\int_1^x(1-t)f(t)\,dt$ pour $x\in[0,1]$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Montrer que $\forall x\in[0,1],\ 0\leqslant x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$.

c) Montrer que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 2\sqrt{x+y}$.

d) Montrer que $\forall x\in[0,1],\ |\mathrm{T}(f)(x)|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}\|f\|_2$.

e) En déduire une inégalité sur $\|\mathrm{T}(f)\|_2$.

f) T est-il une isométrie ?

2) Python.
On note $d=2^{22}-1$, a et m deux entiers (de l'ordre de la dizaine).
On pose $u_0=d$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=au_n\%m$.

a) Écrire une liste avec les 10 premières valeurs de u_n.

b) On pose $r_n=\frac{u_n}{m}$ (division normale).
Soit P_n de coordonnées (r_n,r_{n+1}).
Tracer P_n.

c) Les P_n se trouvent dans $[0,1]^2$.
Montrer que si l'on divise en petits carrés de côté 0,2, alors 4% des coordonnées se trouvent dans chaque carré.

Planche 2015-8 – Oral Maths II – Jean-Pierre Schwebel :

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante : $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sin(u_n)$.

a) Montrer que (u_n) est convergente, et préciser sa limite ℓ.

b) Etudier les séries de terme général $\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et u_n^2.

c) Question supplémentaire : en déduire la nature de la série de terme général u_n.

2) Python.
Soit $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante : $\mathrm{K}_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{K}_{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{K}_i\times\mathrm{K}_{n-i}$.

a) Définir $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manière récursive.

b) Calculer K(2), K(5), K(10) et K(15). Commenter l'efficacité de l'algorithme.

c) Soit $(\mathrm{L}_n)_{n\ \in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{L}_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Définir (L_n) et calculer les 10 premiers termes. Quelle conjecture peut-on émettre ?

d) On suppose la conjecture émise à la question précédente vraie.
Exprimer L_n en fonction de L_{n-1} et en déduire une méthode de calcul plus efficace pour le calcul de K_n.

Planche 2015-9 – Oral Maths I – Jean-Pierre Schwebel :

1) Données numériques à vérifier.
Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10(1+i) \\ 1 & 0 & -(1+i) \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix}$.

a) M est-elle trigonalisable dans $\mathbb{C}$? A quelle équation satisfont les valeur propres de M ?

b) Déterminer les racines carrées de $15-8i$.

c) Soit (E) : $z^3-(2+i)z^2+(1+i)z-10(1+i)=0$.
Montrer que (E) admet une racine imaginaire pure et la déterminer.

d) M est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

e) Question relative à la géométrie, non traitée.
Soit un triangle ABC dont les affixes des sommets sont respectivement $2+i$, $1+i$ et $10(1+i)$.

2) Question de cours.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p. Donner :
- la loi de X
- l'espérance de X
- la variance de X

Comment déterminer la variance de X ?

Planche 2015-10 – Oral Maths II – Gurvan Huet :

1) **a)** Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ converge.

b) On note $f(x)=\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\,dt$.
Montrer que $f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

c) Montrer que f est dérivable, puis calculer $f'(x)$.

2) Python.

a) Ecrire une fonction qui renvoie une matrice M carrée de taille n, avec les termes diagonaux égaux à $(2n+1)n$ et lorsque $|i-j|=1$, $M[i,j]=-(2n+1)^2$.

b) Une fonction déjà écrite est donnée. L'analyser.

c) Se servir de cette fonction pour en écrire une autre qui va renvoyer les p plus petites valeurs propres d'une matrice de taille n définie au début, avec $p \leqslant n$.
Regarder ce qui se passe pour différentes valeurs de n, en fixant $p=10$.

Planche 2015-11 – Oral Maths I – Matthias Houry (incomplet) :

1) Une fonction f_n définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tracer la courbe de f_n, préciser ses tangentes en 0 et $\frac{\pi}{2}$.

b) Montrer qu'il n'existe qu'une seule valeur de x_n telle que $f''(x_n)=0$ (pour $n \geqslant 2$).

c) Soit $(I_n)_{n\geqslant 2}$ la suite d'abscisse x_n. Montrer que sa limite existe et la calculer.

2) Question de cours : loi binomiale, espérance.

Planche 2015-12 – Oral Maths II – Aminata Diagne :

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E tels que $f+g=\mathrm{id}$ et $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \leqslant n$.

a) Montrer que $\ker g \subset \mathrm{im}\, f$. Montrer l'égalité. Que conclure quant à $g \circ f$?

b) En déduire que f et g sont des projecteurs de E.

2) Python.

Planche 2015-13 – Oral Maths II – Geoffroy Sallé :

1) Soit E l'ensemble des suites réelles de période 4.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel, en donner une base.

b) Soit $\varphi : \begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto u_0v_0 + \sum\limits_{k=0}^{2}(u_k-u_{2k+1})(v_k-v_{2k+1}) \end{cases}$
Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

c) Donner une base orthonormée de E pour φ.

2) Python.
Soit u la suite définie par $u_0 = N$ et $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} \text{ si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n+1 \text{ si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$ où $N \in \mathbb{N}$ est fixé.

a) Ecrire un algorithme qui affiche 50 itérations de u_n.

b) Le temps de vol est le plus petit entier n tel que $u_n=1$.
Afficher l'évolution du temps de vol en fonction de N.

Planche 2015-14 – Oral Minettes – Yannick Yasothan :

1) Trouver les applications f telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1+x$.

2) Soit X le nombre de personnes qui rentrent dans un magasin pendant une journée. X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On note p la probabilité qu'une personne qui rentre dans ce magasin se fasse voler son portefeuille, et Y le nombre de personnes s'étant fait voler leur portefeuille en une journée.
Déterminer la loi de Y et son espérance.

Oraux 2014

Planche 2014-1 – Oral Minettes – Anthime Rollin :

1) Pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$, on pose $\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \mathrm{QP}' - \mathrm{PQ}'$. Montrer que φ est bilinéaire.
Pour $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\varphi_{\mathrm{Q}}(\mathrm{P}) = \mathrm{QP}' - \mathrm{PQ}'$. Justifier que $\varphi_{\mathrm{Q}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[\mathrm{X}])$.
A quelles conditions sur n et/ou Q, φ_{Q} est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$?

2) Soit la courbe Γ paramétrée par $\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$

Déterminer le cône de sommet $\mathrm{A}(1,1,1)$ et de directrice Γ.
Déterminer l'intersection du cône avec le plan $(x\mathrm{O}y)$.

Planche 2014-2 – Oral Maths II – Alexis Chan :

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit P un polynôme de degré n tel que $\mathrm{P}(k) = 1 + \frac{1}{1+k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

a) Factoriser $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}(\mathrm{X}) - (\mathrm{X}+2)$.

b) Trouver $\mathrm{P}(n+1)$.

2) Avec Maple
Soit $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{(1+x)^3(1+x^2)^2}$.

a) Trouver les polynômes $\mathrm{A}(\mathrm{X}) \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{B}(\mathrm{X}) \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ tels que $f(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{A}(\mathrm{X})}{(1+x)^3} + \frac{\mathrm{B}(\mathrm{X})}{(1+x^2)^2}$.

b) Trouver le développement en série entière de f.

c)

d)

Planche 2014-3 – Oral de Maths II – Nofoume Ben Ahmed Aly :

1) Soit F la fonction définie par $f : \begin{cases} [0,1]^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x(1-y) \text{ si } x < y \\ (x,y) \mapsto y(1-x) \text{ sinon} \end{cases}$

a) Montrer que $|f(x,y) - f(t,t)| \leqslant |x-t| + |y-t|$ pour x, y et t dans $[0,1]$.

b) En déduire la continuité de f sur $\{(x,x) \ / \ x \in [0,1]\}$.

c) Montrer que f est continue sur $[0,1]^2$.

d) Classe $\mathcal{C}^1$?

e) Max de f ?

2) Avec Maple : des matrices.

Planche 2014-4 – Oral de Maths II – Adam Aïdoudy :

1) Soit f continue sur $\mathbb{R}$, et g définie par $g(x,y) = \frac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)\,dt$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

a) Montrer que g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

c) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Avec Maple.
A est une matrice donnée de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

a) Valeurs propres, vecteurs propres ? Diagonalisable ?

b) Soit T une matrice triangulaire supérieure donnée. Trouver P telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.

c) Trouver le commutant de T, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M telles que $\mathrm{MT} = \mathrm{TM}$.

d) En déduire le commutant de A.

Planche 2014-5 – Oral de Maths II – Tony Schmitt :

1) Soit la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix}$

Soit E un ensemble de vecteurs avec deux composantes égales à 1, et deux composantes égales à -1.

a) Quel est le nombre d'éléments de E ?

b) Prouver que les vecteurs de E sont des vecteurs propres de M.

c) En déduire une simplification de $\det(\mathrm{M})$.

d) Lieu géométrique de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \mathrm{M} \text{ soit inversible}\}$.

e) Déterminer les valeurs (x,y,z) telles que M soit une matrice de symétrie.

2) Avec Maple.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2 \leqslant 16$, on pose $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x^2 - 3$.
Trouver les extrema globaux de f.

Planche 2014-6 – Oral de Maths II – Hubert Souquet-Basiège :

1) Soient A, B, C, A′, B′ et C′ six points du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{CA}'} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}'} = \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}'} = \gamma\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{R}\setminus\{0,1\})^3$.

a) Soient $\mathrm{M}_1(x_1,y_1)$, $\mathrm{M}_2(x_2,y_2)$ et $\mathrm{M}_3(x_3,y_3)$ dans le plan.

Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés $\iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

b) Déterminer une relation entre α, β et γ pour que A′, B′ et C′ soient alignés.

c) Montrer que A′, B′ et C′ sont alignés $\iff \frac{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}{\alpha\beta\gamma} = 1$

2) Avec Maple.
Soit (p_n) une suite telle que p_n est l'entier le plus proche de $\sqrt{n}$.

a) Définir p_n à l'aide de la partie entière, après avoir montré que p_n est encadré entre deux nombres.

b) Ecrire p_n pour $n \in [\![0,31]\!]$ (sous forme de séquence).

c) Soit $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{2^{p_n} - 2^{-p_n}}{2^n}$.
Calculer S_N pour $N \in [\![0,31]\!]$.
Que peut-on conjecturer ?

Planche 2014-8 – Oral de Maths II – Serge Kokolo-Zassi :

1) Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}^n(t)}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) I_n est-elle définie ?

b) Calculer I_1.

c) Déterminer la dérivée de th.

d) Calculer alors I_2.

e) ...

Planche 2014-9 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) Soient f et g deux projecteurs distincts de E, non nuls, λ et μ deux réels tels que $\lambda \notin \{0,1\}$, avec $f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g$.
Montrer que $\mathrm{im}\, g \circ f \subset \mathrm{im}\, f$, que $\mathrm{im}\, f \subset \mathrm{im}\, g$, que $g \circ f = f$, que $\lambda + \mu = 0$, puis que $f \circ g = g$ et $\lambda = -1$.
Qu'est-ce qui caractérise l'image d'un projecteur ?

2) Question de cours : qu'est-ce qu'un développement de Taylor ? Faire un schéma. A quoi cela sert-il ?

Planche 2014-10 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) Déterminer les symétries de la courbe C : $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2+1}{t^2+9} \\ y(t) = \frac{t(t^2+1)}{t^2+9} \end{cases}$
Tracer C.
(hors-programme 2015) La surface comprise entre C et la droite d'équation $x = 1$ est-elle d'aire finie ?

2) Question de cours : (HP) formule de Parseval, binôme de Newton.

Planche 2014-11 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) Convergence de la série de terme général $\frac{\sin(nx)y^n}{n}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$.
Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)y^n}{n} = \arctan \frac{y \sin(nx)}{1 - y\cos x}$

2) Question de cours : tout ce que vous savez sur les coniques.

Planche 2014-12 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) Trouver toutes les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\phi(AB) = \phi(BA)$.
Calculer la trace de $AB - BA$.
Donner le noyau de ψ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\psi(M) = DM - MD$ où D est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $1, 2, \ldots, n$.

2) Question de cours : développement en série entière de $\sin x$.

Planche 2014-13 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) On se place dans le plan muni de son repère orthonormal usuel. On cherche l'ensemble des cercles passant par l'origine et dont deux des tangentes se coupent orthogonalement au point $A(1,0)$.
On suppose qu'il existe un tel cercle et on note $\Omega(a,b)$ son centre et R son rayon. Donner une relation entre a, b et R.
Donner l'équation des tangentes à ce cercle passant par le point A et exprimer le fait que ces tangentes sont orthogonales. Conclure.

2) Question de cours : énoncer le théorème des accroissements finis, illustrer sa signification par un dessin.

Planche 2014-14 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) Montrer que $F(x) = \int_0^x \frac{1-t}{1+t^2}\, dt$ est développable en série entière et déterminer le rayon de convergence.
Calculer $F(1)$ et l'exprimer en fonction de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

2) Question de cours : définition et propriétés de la trace ; (HP) formule et théorème de Green-Riemann.

Planche 2014-15 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) Soient A et B deux points d'un cercle de centre Ω.
Montrer que si M est sur le cercle, alors $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.
Montrer la réciproque (on pourra se placer dans le plan complexe d'origine Ω et choisir A d'affixe Re^{ih} et B d'affixe Re^{-ih}).

2) Question de cours : changement de variable dans les intégrales simples. Matrice de changement de base.

Planche 2014-16 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x\, dx$ converge.
Montrer que $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^2}(x^2 - e^{x - \frac{1}{x}}) \ln x\, dx$, puis que $I < 0$.

2) Question de cours : définition et propriétés de la trace.

Planche 2014-17 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) Montrer que H, d'équations $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + 2\cos t \\ y(t) = \sin(2t) - 2\sin t \end{cases}$ est invariante par rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$.
Etudier et tracer H ainsi que sa développée ; relier cette développée à H.

2) Question de cours : règle de d'Alembert.

Planche 2014-18 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que $\sin((n+1)\theta)+\sin((n-1)\theta) = 2\cos\theta \sin(n\theta)$.
Soit $u_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$; établir une relation de récurrence entre u_{n+1}, u_n et u_{n-1}.
Calculer u_1 et u_2.
Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme U_n tel que $\mathrm{U}_n(\cos\theta) = u_n$.

2) Question de cours : hypothèses et résultats de la dérivation sous le signe $\int$ pour une intégrale à paramètre.

Planche 2014-19 – Oral Maths I – Officiel de la Taupe :

1) Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur le plan $\mathrm{P} : x + y - z = 0$ et celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan.
Donner la distance de $\mathrm{A}(1, 2, 3)$ à $\mathrm{P}_1 : x + y - z = 1$.
Donner les extrema de $f : (x, y) \mapsto (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x + y - 4)^2$; comment les relier à la distance précédente ?

2) Question de cours : (HP) formule de Green-Riemann, formule de Taylor avec reste intégral.

Planche 2014-20 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) Montrer que l'ensemble des solutions de $\mathrm{P}(x) = \int_x^{x+1} \mathrm{P}(t)\,dt$ est stable par combinaison linéaire.
Montrer que si P est solution, alors P' l'est aussi.
Montrer qu'un polynôme de degré 2 ne peut pas être solution et conclure quant aux solutions polynomiales.

Planche 2014-21 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, on note D le déterminant de $(\mathrm{P}, \mathrm{XP}, \mathrm{P}', \mathrm{XP}', \mathrm{X}^2\mathrm{P}')$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.
Montrer que $\mathrm{D} = 0$ ssi il existe deux polynômes non nuls $\mathrm{U} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{V} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{PU} = \mathrm{P}'\mathrm{V}$.
Montrer que P admet une racine multiple ssi $\mathrm{D} = 0$.
Calculer D pour $\mathrm{P(X)} = \mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q$.
Trouver a pour que $\mathrm{P(X)} = \mathrm{X}^3 - 3a\mathrm{X} - 3a - 1$ ait une racine multiple.

Planche 2014-22 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) Trouver les fonctions f continues telles que $\int_0^x (2x - 3t)f(t)\,dt = \frac{x^2}{2}$.

2) Avec Maple.
Résoudre $x(1 - x)y'(x) + (x + 1)y(x) = x^2 + 1$ sur $[1, +\infty[$.
Tracer quelques courbes intégrales, dont celle qui passe par le point $(0, 3)$ et donner la tangente en ce point.

Planche 2014-23 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) On note E l'ensemble des matrices de taille 2, réelles et symétriques.
Pour $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} a' & d' \\ b' & c' \end{pmatrix}$, on pose $(\mathrm{M}|\mathrm{M}') = aa' + 2bb' + cc'$.
Montrer que E est un espace euclidien de dimension 3.
Soit $\mathrm{G} = \{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}),\ \forall \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \mathrm{Tr}(f(\mathrm{M})) = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) \text{ et } \det(f(\mathrm{M})) = \det(\mathrm{M})\}$.
Montrer que G est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{O(E)}, \circ)$, groupe des automorphismes orthogonaux.

Planche 2014-24 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) Montrer que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, mais qu'elle est trigonalisable.
Montrer que les valeurs propres de M vérifiant $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$ sont dans $\{-1, 0, 1\}$ et déterminer la dimension des sous-espaces propres associés.
Montrer que 0 est valeur propre de M.
Trouver toutes les matrices M vérifiant $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$.

2) Avec Maple.
Pour $i \in [\![0, 10]\!]$, on pose $x_i = \frac{i}{10}$ et $y_i = (-1)^i(x_i - \frac{2}{5})^2$ et on définit f par :
- $\forall i \in [\![0, 10]\!],\ f(x_i) = y_i$
- f est polynomiale de degré 3 sur $[x_{i-1}, x_i]$
- $f'(0^+) = -1$ et $f'(1^-) = 1$
- f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.

Déterminer f et la tracer sur $[0, 1]$, les points (x_i, y_i) figurant sur le tracé.

Planche 2014-25 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) Montrer que $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{x - \arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\,dx$ est convergente.
Trouver a, b et c tels que $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$ et calculer I.

Planche 2014-26 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) Déterminer les solutions non nulles, développables en série entière de l'équation (E) : $x(1 - x)y'' + xy' - y = 0$.
Préciser le rayon de convergence.
Déterminer toutes les solutions et les prolonger si nécessaire.

2) Avec Maple.
Déterminer l'équation de la normale au point $(x(t), y(t))$ de la courbe paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
Trouver une condition sur les paramètres u, v et w de trois points tels que les normales en ces points soient concourantes.
Déterminer le centre de gravité du triangle de sommets $\mathrm{M}(u)$, $\mathrm{M}(v)$ et $\mathrm{M}(w)$.
Tracer la courbe paramétrée ainsi que 3 normales.

Planche 2014-27 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) Étude de l'intégrale à paramètre $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$: définition, continuité, dérivabilité, etc.

Planche 2014-28 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ m-2 & 2-m & m \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Planche 2014-29 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) On note C une matrice colonne à n lignes, L une matrice ligne à n colonnes, et $A = CL - I_n$.
Peut-on avoir $A = I_n$? Montrer que $A^2 = (LC-2)A + (LC-1)I_n$.
A quelle condition A est-elle la matrice d'une symétrie ?
Déterminer une équation du second degré vérifiée par λ, valeur propre de A, et étudier la diagonalisabilité de A.

2) Avec Maple.
Trouver les extrema globaux de $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} + x^2 - 3$ sur le disque défini par $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

Planche 2014-30 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) Soit v de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(uv)'' = u''v''$ avec $u(x) = x^p$, $p \geqslant 2$.
Expliciter l'équation différentielle vérifiée par v et en chercher les solutions développables en série entière. Obtient-on ainsi toutes les solutions ?

Planche 2014-31 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi t)}{t(x+t)}\, dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?
Chercher la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Planche 2014-32 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) On note a_1, a_2 et a_3 les racines du polynôme $X^3 + X^2 + 1$.
Calculer le déterminant du système S : $\begin{cases} x + a_1 y + a_1^2 z = a_1^4 \\ x + a_2 y + a_2^2 z = a_2^4 \\ x + a_3 y + a_3^2 z = a_3^4 \end{cases}$
Montrer qu'il est non nul.
Effectuer la division euclidienne de X^4 par $X^3 + X^2 + 1$ et trouver une solution particulière de S. Conclure.

2) Avec Maple.
Résoudre $y' = 5 + 3y - y^2$ et tracer pour $x \in [0, 1]$.
Ecrire une procédure permettant d'approximer la solution par la méthode d'Euler, tester et tracer.
Tracer sur un même graphe la solution et son approximation pour 100 points.

Planche 2014-33 – Oral Maths II – Officiel de la Taupe :

1) Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$.

2) Avec Maple.
On donne la courbe d'équations $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases}$.
Trouver l'équation de la tangente en un point M(t).
Déterminer les coordonnées du projeté N de P(1, 2) sur la tangente en M(t).
Quelle est la courbe décrite par N lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

Planche 2014-34 – Oral ICNA – Officiel de la Taupe :

1) Montrer que si (a_n) est une suite complexe telle que $\sum |a_n|$ converge, alors elle est bornée.
Montrer que la série de fonctions $f_n(t) = \frac{a_n e^{-t} t^n}{n!}$ converge simplement.
Sa somme est-elle continue ?
Justifier l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$.
Montrer que $\int_0^{+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{a_n e^{-t} t^n}{n!} \right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

2) Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n, distincte de $\pm I_n$ et telle que $A^2 = I_n$.
Montrer que $\operatorname{Tr}(A) = n + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\operatorname{Tr}(A) \leqslant n - 2$.

Planche 2014-35 – Oral Télécom SudParis – Officiel de la Taupe :

1) Montrer que $x^5 + nx - 1 = 0$ admet une unique racine u_n sur $\mathbb{R}$.
Trouver la limite de la suite et donner un équivalent de u_n.

2) Montrer que, si u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$; quand peut-on avoir égalité ?

Planche 2014-36 – Oral ENSSAT - www.enssat.fr :

Partie 1
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^{\ln n}}{n!}$.

Partie 2
Soient $b_0, b_1 \dots b_n$ des réels (où $n \in \mathbb{N}^*$) non nécessairement distincts. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on considère l'application $L_k : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(b_k) \in \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

1) Après avoir vérifié que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'application L_k est linéaire, déterminer son noyau et son image.

2) Montrer que la famille $\{L_0, L_1, \dots L_n\}$ est linéairement indépendante si et seulement si les réels $b_0, b_1 \dots b_n$ sont 2 à 2 distincts.

Planche 2014-37 – Oral ENSSAT - www.enssat.fr :

Partie 1
Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1) Déterminer la projection orthogonale de $\vec{i}+\vec{k}$ sur le plan P d'équation $x+2y+2z=0$.

2) Déterminer la matrice dans la base B de la rotation r, d'axe dirigé et orienté par $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Partie 2

On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n(n+1)}$

1) Déterminer R, le rayon de convergence de cette série entière.
On note f la somme de la série entière sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.

2) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

3) En déduire la nature et la somme des séries numériques $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$.

4) Retrouver la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ par une autre méthode.

Planche 2014-38 – Oral ENSSAT - www.enssat.fr :

Partie 1

On considère le polynôme $\mathrm{P}=\mathrm{X}^3+3\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1$ et on munit le plan d'une base orthonormée $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la courbe constituée des points $\mathrm{M}(x,y)$ vérifiant $\mathrm{P}(x)=\mathrm{P}(y)$ est la réunion d'une droite et d'une conique notée $\mathcal{C}$ dont on précisera la nature et l'excentricité.

2) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $\mathrm{A}(-1,\sqrt{2}-1)$.

3) Déterminer un point de $\mathcal{C}$ par lequel passe une tangente orthogonale à celle issue du point A.

Partie 2

1) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum\cos(\frac{2n\pi}{3})x^n$?

2) Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

Planche Proba 2014-39 :

Un joueur vise une cible avec une fléchette. A chaque lancer, il atteint la cible avec la probabilité p, $0<p<1$, et la rate avec la probabilité $q=1-p$.
Il effectue une série de lancers indépendants.
Il gagne lorsque, pour la première fois, sur n lancers, le nombre de fois où il atteint la cible excède de 2 le nombre de fois où il la rate.
Il perd lorsque, pour la première fois, sur n lancers, le nombre de fois où il rate la cible excède de 2 le nombre de fois où il l'atteint.
La partie s'arrête lorsque le joueur a gagné ou perdu.
On note les événements suivants :

- A_n : "le joueur gagne au $n^{\text{ème}}$ lancer" ;
- B_n : "le joueur perd au $n^{\text{ème}}$ lancer" ;
- A : "le joueur gagne la partie" ;
- B : "le joueur perd la partie".

1) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$.

2) En déduire P(A) et P(B). Déterminer la probabilité pour que la partie dure indéfiniment.

3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers que comporte la partie. Déterminer la loi de X. En déduire l'espérance et la variance de X.

Planche Proba 2014-40 :

Deux amis Pierre et Paul jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel.

- Si cet entier n est impair, Paul donne n euros à Pierre, on considère que Pierre a gagné.
- Si cet entier n est pair, Pierre donne n euros à Paul, on considère que Paul a gagné.
- Si n est nul, rien ne se passe, on considère que la manche est nulle.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre obtenu à chaque sollicitation, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a>0$.
On note enfin : A : "Pierre gagne", B : "Pierre perd" ; C : "la manche est nulle" ; $p=\mathrm{P}(\mathrm{A})$; $q=\mathrm{P}(\mathrm{B})$; et $r=\mathrm{P}(\mathrm{C})$.

1) Déterminer r, $p+q$ et $p-q$.

2) En déduire p et q.

3) Calculer l'espérance du gain de Pierre.

Planche Proba 2014-41 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$.
On note $\mathrm{U}=|\mathrm{X}-\mathrm{Y}|$ et $\mathrm{V}=\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

1) Déterminer la loi du couple (U,V).

2) En déduire la loi de U et celle de V.

3) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Planche Proba 2014-42 :

Un voyageur se promène à l'intérieur du TER Quimper-Rennes qui comporte 4 voitures. Tous les quarts d'heure, il passe d'une voiture à l'une des voitures qui la jouxtent (choisissant au hasard et de manière équiprobable lorsqu'il y en a deux). Son choix ne dépend aucunement des positions précédentes. Les voitures sont numérotées de 1 à 4 à partir de la voiture de tête.
Soit X_n le numéro de la voiture où il se trouve au temps $t=n$ (exprimé en quarts d'heure).
On suppose qu'au départ ($t=0$) il se trouve dans la voiture de tête.
On note $p_{i,n}=\mathrm{P}[\mathrm{X}_n=i]$ et on pose $\pi_n=(p_{1,n},p_{2,n},p_{3,n},p_{4,n})\in\mathbb{R}^4$.

1) Exprimer matriciellement π_{n+1} en fonction de π_n.
En déduire une expression de π_{n+2} en fonction de π_n.

2) a) Que peut-on dire des suites $(p_{2,2n})$ et $(p_{4,2n})$?
Déterminer les termes généraux des suites $(p_{1,2n})$ et $(p_{3,2n})$.
On pourra regrouper les coordonnées deux par deux de manière appropriée.

b) Déterminer les suites $(p_{i,n})_n$. Ces suites ont-elles une limite lorsque $n \to +\infty$?

Planche Proba 2014-43 :

Dans un quiz télévisé les joueurs sont opposés de la manière suivante. La première manche est disputée par les joueurs A_0 et A_1. Le gagnant est opposé dans la deuxième manche à un nouveau joueur A_2, le gagnant de la deuxième manche est opposé le troisième jour à un joueur A_3, etc.
Le premier joueur à avoir remporté trois manches consécutives remporte le prix.
Tous les joueurs sont de même force et chacun a donc une probabilité 1/2 de remporter une manche à laquelle il participe.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité que A_n joue au moins une fois et q_n celle qu'il remporte le prix.

1) Calculer q_0, q_1, q_2 et q_3.

2) a) Si le joueur A_n joue, quels joueurs est-il susceptible d'affronter lors de la première manche qu'il dispute ?

b) Montrer que pour $n \geqslant 4$, on a $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}$

3) Calculer pour tout entier naturel n les probabilités p_n et q_n.

Planche Proba 2014-44 :

Une société de distribution reçoit des produits. Chaque produit se trouve dans une boîte et on suppose que certaines boîtes peuvent être détériorées pendant le transport. De plus, on suppose que lorsque la boîte est détériorée, la probabilité que le produit soit invendable est 1/6. Soit X le nombre de produits invendables parmi les produits reçus.

1) On suppose que la société reçoit 6 boîtes détériorées. Déterminer la loi de X.

2) On suppose que le nombre de boîtes détériorées reçues suit une loi de Poisson. On note Y le nombre de boîtes détériorées.

a) Déterminer son paramètre si $P(Y = 5) = P(Y = 6)$.

b) Soit n un entier naturel. Déterminer $P((X = k) \cap (Y = n))$.

c) En déduire la loi de X.

Planche Proba 2014-45 :

1) On jette un dé ordinaire. Soit T le nombre nécessaire de jets pour obtenir un as.
Quelle est la loi de T ? Donner son espérance et sa variance.

2) On jette 4 dés ordinaires. S'il sort des as, on met les dés correspondants de côté et on jette les dés restants une seconde fois. On met à nouveau de côté les dés qui présentent l'as, et on jette à nouveau les autres, etc. La partie est terminée lorsque tous les as sont sortis.
Pour $i \in [\![1, 4]\!]$, soit T_i le nombre de tours nécessaires pour obtenir un as avec le dé numéro i. Soit N le nombre de tours nécessaires pour terminer la partie.

a) Déterminer la loi de N.

b) Calculer l'espérance de N.

Planche Proba 2014-46 :

Un point M se déplace dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Au départ, M est au point O. A chaque instant, il se déplace d'un pas dans l'une des 4 directions $\vec{i}, -\vec{i}, \vec{j}, -\vec{j}$. Ses coordonnées après n déplacements sont des variables aléatoires réelles X_n et Y_n.

1) Calculer $P(X_n = n)$, $P(Y_n = n)$ et $P(X_n = n \cap Y_n = n)$.
X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

2) Trouver une relation entre $E(X_n^2)$ et $E(X_{n+1}^2)$. Calculer $E(X_n^2)$.
(On pourra poser $X_{n+1} = X_n + U$ où U est une variable aléatoire réelle à préciser).

3) Calculer $P(X_n = 0 \cap Y_n = 0)$.

Planche Proba 2014-47 :

1) On dispose de deux dés, un rouge et un bleu, que l'on supposera équilibrés. On effectue une succession de lancers de chacun des deux dés. On appelle X le nombre de lancers nécessaires pour que le dé rouge amène un six, et Y le nombre de lancers nécessaires pour que le dé bleu amène un six.

a) Préciser les lois de ces deux variables aléatoires, leurs espérances et leurs variances.

b) Calculer $P(X > n)$ pour tout entier naturel n.

2) On définit $S = \min(X, Y)$ et $T = Y - X$.

a) Calculer $P(S > n)$ et en déduire la loi de S. Préciser son espérance.

b) Calculer $P[(S = n) \cap (T = r)]$ pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier relatif r, en fonction du signe de r.
En déduire la loi marginale de T.

3) Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ? Vérifier que $\sum\limits_{r\in\mathbb{Z}} P(T = r) = 1$.
Calculer l'espérance et la variance de T.

Planche Proba 2014-48 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose d'une urne contenant $n - 1$ boules numérotées de 1 à $n - 1$, et de n boîtes $B_1, B_2, \dots, B_n$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la boîte B_i contient i jetons numérotés de 1 à i.
On tire une boule de l'urne ; si la boule porte le numéro i, on tire un jeton de la boîte B_i et un jeton de la boîte B_{i+1}. On dit qu'il y a succès si les deux jetons portent le même numéro.

1) Quelle est la probabilité p_2 de succès lorsque $n = 2$?

2) Quelle est la probabilité p_n de succès pour $n \geqslant 2$?

3) **a)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$ et en déduire un équivalent au voisinage de l'infini de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

b) Donner un équivalent de p_n pour n au voisinage de l'infini.

Planche Proba 2014-49 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune une loi géométrique de paramètre p, où $0 < p < 1$.

1) Calculer la probabilité $P(X \geqslant a)$ pour $a \in \mathbb{N}$.

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X \geqslant mY)$ et en donner un équivalent simple quand m tend vers $+\infty$.

3) On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune a boules blanches et b boules rouges, dans lesquelles on effectue des tirages d'une boule avec remise.
Déterminer la probabilité qu'il faille au moins deux fois plus (au sens large) de tirages dans l'urne U_1 que dans l'urne U_2 pour obtenir la première boule blanche.

Planche Proba 2014-50 :

Deux urnes A et B contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule de A et une boule de B, dont on note a et b les numéros respectifs.

1) Soit E l'événement : "le rapport $\frac{a}{b}$ est un nombre entier".

a) Calculer la probabilité P(E) dans le cas où $n = 3$.

b) Calculer la probabilité P(E) dans le cas où $n = 4$.

c) Calculer la probabilité P(E) dans le cas général.

2) Déterminer un encadrement de P(E).

3) En déduire un équivalent de P(E) quand n tend vers $+\infty$.

Planche Proba 2014-51 :

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

2) En remarquant que $(1+t)^n(1+t)^n = (1+t)^{2n}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

3) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

Planche Proba 2014-52 :

1) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer les valeurs de k pour lesquelles $P(X = k)$ est maximale.

2) Démontrer que X est plus souvent paire qu'impaire.

3) Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.
Introduire la variable aléatoire réduite centrée associée à la variable aléatoire X_n suivant la loi de Poisson de paramètre n, et chercher la probabilité qu'elle soit négative.

Planche Proba 2014-53 :

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, avec N entier, et $N \geqslant 2$. On effectue n tirages avec remise ($n \in \mathbb{N}^*$) et on note Z_k la numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage pour $k \in [\![1, n]\!]$.
Enfin, on pose $S_n = \max(Z_1, \ldots, Z_n)$.

1) Calculer $P(S_n \leqslant i)$ pour $i \in [\![1, N]\!]$.

2) Montrer que si Y est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, alors $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} P(Y \geqslant i)$.

3) En déduire $E(S_n)$ puis trouver la limite de $E(S_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ ainsi qu'un équivalent de $E(S_n)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Planche Proba 2014-54 :

Un plan de ville a la configuration d'un damier à 4 cases. Les rues sont en sens unique (de haut en bas et de gauche à droite). Chaque rue a une probabilité p d'être fermée pour travaux, indépendamment des autres rues. On cherche la probabilité ρ de pouvoir traverser la ville de A à C.

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & I & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L & \to & O & \to & J \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & \to & K & \to & CA \end{array}$$

1) Déterminer la probabilité p_{AO} qu'il existe un chemin libre de A au centre-ville O.

2) **a)** Déterminer la probabilité p'_{AC} qu'il existe un chemin libre de A à C, ne passant pas par O.

b) Déterminer la probabilité p''_{AC} qu'il existe un chemin libre de A à C, passant par O.

3) Déterminer la probabilité π_{ADC} que le chemin ADC soit libre et qu'il existe un chemin libre de A à C passant par O.

Planche Proba 2014-55 :

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant respectivement 3 boules numérotées 0, et 3 boules numérotées 1. On appelle échange l'épreuve consistant à tirer une

boule de U_1 et une boule de U_2, puis à les échanger, c'est-à-dire mettre chaque boule tirée dans l'urne dont elle ne provient pas.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X_n la variable aléatoire donnant la somme des numéros inscrits sur les boules se trouvant dans l'urne U_1 à l'issue de n échanges.

1) Exprimer chacune des probabilités $P(X_{n+1} = 0)$, $P(X_{n+1} = 1)$, $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ et $P(X_n = 3)$.

2) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 1 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \end{pmatrix}$, $L = (0 \quad 1 \quad 2 \quad 3)$ et $J = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$.

a) Trouver deux réels α et β vérifiant : $LA = \alpha L + \beta J$.

b) On pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

Vérifier que l'on a $U_{n+1} = AU_n$.
En déduire $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$.

3) Déterminer $E(X_n)$ en fonction de n.