Calculs d'intégrales

Antoine Louatron

Table des matières

I Dérivations et primitives

I sera toujours un intervalle non vide et non réduit à un point.

I.1 Fonctions à valeurs complexes

I.1.1 Définition
Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(t) = u(t) + iv(t) \end{array} \right.$. On dit que f est dérivable si ses parties réelles $u : I \to \mathbb{R}$ et imaginaires $v : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables et alors $f' = u' + iv'$.

I.1.2 Proposition
Une somme et un produit de fonctions complexes est encore dérivable et on peut appliquer les formules usuelles.

Preuve.
Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{C}$ dont on note u_1, u_2 les parties réelles et v_1, v_2 les parties imaginaires.

$$(f_1 + f_2)' = (u_1 + iv_1 + u_2 + iv_2)' = ((u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2))' = u_1' + u_2' + i(v_1' + v_2') = f_1' + f_2'$$

Soit $\lambda = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ une constante. Alors $(\lambda f_1)' = (xu_1 - yv_1 + i(xv_1 + yu_1))' = xu_1' - yv_1' + i(xv_1' + yv_2') = \lambda f_1'$.

On peut démontrer de même les formules $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$.

En effet $(f_1f_2)' = (u_1u_2 - v_1v_2 + i(u_1v_2 + v_1u_2))' = u_1'u_2 + u_1u_2' - v_1'v_2 - v_1v_2' + i(u_1'v_2 + u_1v_2' + v_1'u_2 + v_1u_2')$.

Or $f_1'f_2 = u_1'u_2 - v_1'v_2 + i(u_1'v_2 + u_2v_1')$ et $f_1f_2' = u_1u_2' - v_1v_2' + i(u_1v_2' + u_2'v_1)$. On retrouve bien les 8 termes de $(f_1f_2)'$. ■

I.1.3 Proposition
Si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction dérivable qui ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Si g est également dérivable, $\frac{g}{f}$ est dérivable et $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$.

Preuve.
On note $f = u + iv$ sous forme algébrique.

Si f ne s'annule pas, $\frac{1}{f} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} - i\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

Remarquons que u^2+v^2 est dérivable sur I et ne s'annule pas donc $\sqrt{u^2+v^2}$ l'est également par composition. Ainsi $\frac{1}{f}$ est dérivable par quotients.

De plus, $(f \times \inf f)' = 0$ et donc $f'\frac{1}{f} + f(\frac{1}{f})' = 0$. On trouve donc $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

De même $(f \times \frac{g}{f})' = g'$ Ainsi $f'\frac{g}{f} + f(\frac{g}{f})' = g'$ et donc $(\frac{g}{f})' = \frac{1}{f}(g' - \frac{f'g}{f}) = \frac{g'f - gf'}{f^2}$ ■

I.1.4 Proposition
Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable définie sur un intervalle non vide et non réduit à un point.

Alors $f : \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(\varphi(t)) \end{array} \right.$ est dérivable et sa dérivée est $f' : t \mapsto \varphi'(t)\exp(\varphi(t))$

Preuve.
On note $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ pour tout $tin\mathcal{I}$ où u, v sont à valeurs réelles.

Alors pour $t \in I$ on a

$$e^{\varphi(t)} = e^{u(t)+iv(t)} = e^{u(t)} \times e^{iv(t)}$$

Par produit, f est dérivable sur I et on a

$$f'(t) = u'(t)e^{u(t)}e^{iv(t)} + e^{u(t)} \times iv'(t)e^{iv(t)} = \varphi'(t)e^{\varphi(t)}$$

I.1.5 Définition
Soit f une fonction "régulière", $a \leqslant b$ dans son domaine de définition. L'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ est l'aire entre la courbe, l'axe (Ox) et les droites $x = a$ et $x = b$. Il est entendu que l'"aire" est négative si la courbe est sous l'axe.

On définit l'intégrale de d'une fonction complexe $f = u + iv$ par $\int_a^b u + i\int_a^b v$ (où évidemment u et v sont les fonctions partie réelle et partie imaginaire de f).

I.1.6 Théorème
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. *Croissance : $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$ et $f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*
2. *Linéarité : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$. On dit que l'intégrale est linéaire.*
3. *Relation de Chasles : Si $c \in [a, b]$ alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Cette relation reste vraie même dans le cas où $c \notin [a, b]$ (à condition que les objets en jeu aient du sens).*
4. *$\int_b^a f = -\int_a^b f$*

I.2 Primitives

I.2.1 Définition
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. Une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $F' = f$.

I.2.2 Définition
Soit I un intervalle infini. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ssi f est continue, dérivable sur I et f' est continue sur I.

Une primitive est par nature de classe $\mathcal{C}^1$.

I.2.3 Exemple
Calculer une primitive pour chacune des fonction suivante :

1. $x \mapsto \frac{x^3}{2} + x^2 + 1$.
2. $x \mapsto \sin(ax)$ pour $a \in \mathbb{R}^*$ fixé.
3. $x \mapsto e^{2x}$.
4. $x \mapsto e^{ix}$.

I.2.4 M-méthode
Pour vérifier un calcul de primitive, il suffit de re-dériver.

I.2.5 Proposition
*Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un **intervalle**. Alors deux primitives de f diffèrent d'une constante (additive).*

Preuve.
Soient F, G deux primitives de f On a alors $F' = G' = f$ et donc $(F - G)' = 0$. On en déduit que $F - G$ est constante. ■

I.3 Conséquence

Soient $a, b \in I$ et F_1, F_2 deux primitives de $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Alors $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$ (la constante éventuelle se simplifie par différence).

I.3.1 Primitives usuelles

On fera bien attention aux **intervalles** sur les quelles ces primitives sont définies.

Fonction	intervalle	primitive
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_-^*$	$\ln(-x)$
sin	$\mathbb{R}$	$-\cos$
cos	$\mathbb{R}$	sin
tan	$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	$-\ln(\cos)$
exp	$\mathbb{R}$	exp
ch	$\mathbb{R}$	sh
sh	$\mathbb{R}$	ch
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	arctan
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	arcsin
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	arccos
$\sin(\alpha x), \alpha \neq 0$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$
$\cos(\alpha x), \alpha \neq 0$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$
$e^{kx}, k \neq 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{k}e^{kx}$

I.3.2 Exemple
Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$.

I.3.3 Proposition
Soit $a \in \mathbb{R}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x+a}$ sur $]-a,+\infty[$ est $x \mapsto \ln(x+a)$.

I.3.4 Question

Et sur $]-\infty,-a[$?

I.3.5 Fonctions composées

Si on reconnaît un produit faisant intervenir une fonction et sa dérivée, on peut penser à utiliser la formule de dérivation composée pour calculer une primitive. Par exemple, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(x)$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x)^2$.

I.3.6 Exercice
Calculer des primitives (en précisent l'intervalle) de

1. $x \mapsto e^x \sin(e^x)$.
2. $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$.
3. $x \mapsto \cos(x)\sin^3(x)$.

II Calcul d'intégrales

II.1 Lien avec les primitives

II.1.1 Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel)
Soit $f :\in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ (définie sur un intervalle infini). Soit $a \in \mathcal{I}$. Alors la fonction

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int\limits_a^x f(t)\,dt \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et $\varphi' = f$, c'est à dire que φ est une primitive de f sur l'intervalle I.

C'est même la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Evidemment le théorème est encore vrai si f est à valeurs complexes, en l'appliquant aux parties réelle et imaginaire.

Preuve.
Admis provisoirement. ∎

Explication Dériver une intégrale dont une borne est fixe et l'autre est la variable redonne la fonction de départ.

II.1.2 Théorème
Toute fonction continue sur un intervalle possède au moins une primitive sur cet intervalle.

Si F est une primitive quelconque de $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ alors pour $a, b \in I$, $\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F]_a^b$ et si $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{C})$ alors $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Preuve.
Notons $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \varphi(b) = \varphi(b) - \varphi(a) = F(b) - F(a)$ car F et φ diffèrent d'une constante. ∎

II.1.3 Exemple
1. $\int_0^1 x^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$.
2. $\int_0^{2\pi} \cos$, $\int_0^\pi \cos t\mathrm{d}t$.
3. $\int_0^{2\pi} |\sin t|\mathrm{d}t$.
4. $\int_0^\pi \cos^2$

II.1.4 Notation

Nous noterons maintenant $\int f(t)\mathrm{d}t$ pour désigner une primitive quelconque de f une fonction continue sur un intervalle.

En effet, si F est une primitive quelconque de f on a pour a fixé et tout x, $\int_a^x f = F(x) - F(a)$.

II.1.5 Conséquences pour les primitives

On pourra noter $\int (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int f(t)\mathrm{d}t + \mu \int g(t)\mathcal{D}t$.

II.1.6 Exemple
Nous allons montrer que $\frac{\ln x}{x} \underset{+\infty}{\to} 0$. Soit $x > 1$. Alors $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

Or pour $t \in [1, x]$ on a $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$. Ainsi par croissance de l'intégrale, $\ln(x) \leqslant \int\limits_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. Or $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2}} = \int t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = 2t^{\frac{1}{2}}$

Ainsi $\ln(x) \leqslant 2\sqrt{x} - 2$ et donc $0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}$. On en déduit immédiatement par encadrement que $\frac{\ln x}{x} \underset{+\infty}{\to} 0$.

II.2 Outils de calcul

II.2.1 Théorème
Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Preuve.
Comme u et v sont $\mathcal{C}^1$, la fonction $u'v + uv'$ est continue et une primitive en est uv. Alors

$$\int_a^b (u'v + uv') = [uv]_a^b$$

La linéarité conclut (les fonction $u'v$ et uv' sont intégrables sur $[a, b]$, donc on peut appliquer la linéarité.) ∎

Explication On attend de vous une seule chose quand vous faites une IPP : dire que les fonctions sont bien $\mathcal{C}^1$. Sans ça, votre calcul ne vaut pas un kopeck.

II.2.2 Exemple

1. Calculer $\int_1^2 \ln(t)\mathrm{d}t$

   On pose $v : x \mapsto \ln x$. C'est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $v' : x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour avoir $u' : x \mapsto 1$ il suffit de poser $u : x \mapsto x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et alors

$$\int_1^2 \ln t\mathrm{d}t = \int_1^2 1 \times \ln t\mathrm{d}t = [t \ln t]_1^2 - \int_1^2 t\frac{1}{t}\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1$$

2. Donner une primitive de arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

II.2.3 Notations primitive

On peut tout à fait noter $\int u'(t)v(t) = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)$. Il suffit en fait d'enlever les bornes dans l'IPP, et donc le corchet qui n'a plus de sens.

II.2.4 Proposition
Un primitive de $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *est* $x \mapsto x\ln(x) - x$.

II.2.5 Théorème
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b], I)$ *et* $f :\in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. *Alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$

Preuve.
f admet au moins une primitive F, et alors $F \circ \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $\varphi' F' \circ \varphi = \varphi' f \circ \varphi$. Alors

$$\int_a^b \varphi' \times f \circ \varphi = [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

II.2.6 M-Remarque

Tout se passe comme si on posait $t = \varphi(u)$, alors $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \varphi'(u)$ ie. $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$ et ainsi $f(t)\mathrm{d}t = f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$.
Et quand u varie de a à b, $t = \varphi(u)$ varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

II.2.7 Exemple (De gauche à droite)
On choisit une fonction φ et on pose $t = \varphi(u)$. Alors $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$. On doit ensuite trouver a, b pour que les bornes d'intégrations de départ soient bien $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

1. Calculer l'aire du demi-disque de centre 0 et de rayon 1.
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$

II.2.8 Exemple (De droite à gauche)
Il s'agit ici de reconnaître une fonction de la forme $\varphi'(u)f(\varphi(u))$. Les bornes obtenues sont $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. Il s'agit ni plus ni moins d'observer qu'une fonction $u(t)$ apparaît et que sa dérivée est en facteur.

1. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.
3. Calculer $\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x}+1}$ en posant $t = e^x$.

II.2.9 Exercice
changer $\int_a^b f$ *en une intégrale sur* $[0,1]$, $[-1,1]$.

II.2.10 Proposition
1. *Si f est paire* $\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_0^a f(t)dt \underset{u=-t}{=} \int_0^a f(-u)du + \int_0^a f(t)dt = 2\int_0^a f$.
2. *Si f est impaire* $\int_{-a}^{a} f = 0$.
3. *Si f est T périodique* $\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_T^{a+T} f \underset{u=t-T}{\int}{}_a^0 f + \int_0^T f + \int_0^a f(u)du$.

II.2.11 Utilisation pour le calcul de primitive

1. Pour un calcul de primitive il suffit encore une fois d'oublier les bornes.Vous devez écrire proprement la formule (et vérifier ses hypothèses) et ne pas oublier de revenir à la variable de départ à la fin du calcul
   Deux cas se présentent.
   — On reconnaît $f(\varphi(u))\varphi'(u)$ dans la fonction à intégrer.
   — On veut faire un changement de variable de la forme $u = \psi(t)$. Il faut alors que ψ admette une bijection réciproque pour pouvoir revenir à la variable t.
2. Pour un calcul d'intégrale, ne pas oublier de changer les bornes

II.2.12 Exemple
1. Primitives de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}$ pour $a > 0$ fixé.
2. $\int \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$
3. $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$ en posant $u = \cos(t)$

III Exemples classiques

III.1 Utilisation des complexes

III.1.1 Proposition
Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. $\int e^{\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}$.

Preuve.
Voir le calcul de dérivée de début de chapitre. ■

III.1.2 Cos et sin

Rappel : $\cos(\theta) = \Re(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

III.1.3 Exemple

Calculer une primitive de $x \mapsto e^x \sin(2x)$. On a pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x \sin(2x) = \mathrm{Im}(e^x e^{2ix})$ et donc :

$$\int e^x \sin(2x)\mathrm{d}x = \mathrm{Im}(\int e^x e^{2ix}\mathrm{d}x) = \mathrm{Im}(\frac{1}{1+2i}e^x e^{2ix})$$

Or $\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}$ et donc $\frac{1}{1+2i}e^x e^{2ix}) = \frac{e^x}{5}(\cos(2x) - 2\sin(2x) + i(2\cos(2x) + \sin(x)))$.
Finalement $\int e^x \sin(2x)\mathrm{d}x = \frac{e^x}{5}(2\cos(2x) + \sin(x))$

III.1.4 Degré 1 complexe

Calculer pour $z = a + ib$ sous forme algébrique avec $b \neq 0$ une primitive de $\frac{1}{t-z}$.

III.2 Suites d'intégrales

III.2.1 Principe

Pour étudier des suites de la forme $I_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$ on effectue souvent une IPP pour trouver alors une relation de récurrence.

III.2.2 Exemple
Intégrales de Wallis : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$. Calculer I_n.

On a déjà $I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\mathrm{d}t = 1$.

De plus pour $n \geqslant 2$ on a $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n-1}(t)\mathrm{d}t$ On effectue une IPP en posant $u' : t \mapsto \sin t$ et $v : t \mapsto \sin^{n-1} t$. qui sont $\mathcal{C}^1$. Alors $u : t \mapsto -\cos t$ convient et $v' : t \mapsto (n-1)\cos(t)\sin^{n-2} t$.

Ainsi $I_n = 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\mathrm{d}t = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ et donc $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

On en déduit les rangs pairs et impairs sous forme de produits : $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}\dots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\dots\frac{2}{3}I_1 = \frac{4^n n!}{(2n+1)!}$.

III.2.3 Exemple
Trouver une relation de récurrence pour la suite d'intégrales $I_n = \int_0^1 t^n e^t \mathrm{d}t$.

III.2.4 Exemple
Calculer directement $\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ puis par intégration par parties pour exprimer $\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$. En déduire une méthode pour calculer $\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$ puis adapter pour trouver un algorithme de calcul de $\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

III.3 Fractions rationnelles

III.3.1 M-Exemple

$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^n}$, n entier naturel.

III.3.2 M-Exemples

Primitives de $t \mapsto \frac{1}{t^2+a^2}$ pour $a \neq 0$ fixé.

III.3.3 Forme des fonctions à intégrer

On souhaite intégrer toutes les fonction du type $x \mapsto \frac{1}{P(x)}$ où $P(x)$ est une fonction polynomiale de degré 1 ou 2.

III.3.4 Degré 1

On sait déjà que pour $a \in \mathbb{R}$ on a $\int \frac{\mathrm{d}t}{t-a} = \ln|t-a|$. et pour $z = a+ib \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\int \frac{\mathrm{d}t}{t-z} =$

III.3.5 M-Remarque

Une expression de la forme $\frac{1}{(t-a)(t-b)}$ $(a \neq b)$ peut toujours se mettre sous la forme $\frac{\alpha}{t-a} + \frac{\beta}{t-b}$ et on est ramené au cas précédent.

III.3.6 Racines complexes

Si on a à intégrer $\frac{1}{at^2+bt+c}$ avec $b^2-4ac < 0$, alors on le passe sous forme canonique puis on effectue une factorisation et un changement de variable pour retrouver une fonction de la forme $\frac{1}{u^2+1}$

III.3.7 Exemple
Calculer $\int \frac{1}{t^2+2t+5}\mathrm{d}t$.