

Exercice 1

Montrer que $X^3 + pX + q$ avec $(p, q) \neq (0, 0)$ ne peut pas avoir de racines triple.

Montrer que P possède une racine double ssi $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Exercice 2

Soient u et v deux endomorphismes de \mathbb{C}^4 tels que $u \circ v = -v \circ u$ et $u \circ u = v \circ v = Id$.

1. Montrer que u et v sont de trace nulle et diagonalisables. Donner leurs valeurs propres et les dimensions des sous-espaces associés.
2. Montrer que si (e_1, e_2) est une base de $E_1(u)$ alors $(v(e_1), v(e_2))$ est une base de $E_{-1}(u)$.

Exercice 3

On note r une rotation de \mathbb{R}^3 , d'axe D , distincte de l'identité et s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P .

Montrer que si $P = D^\perp$ alors $s \circ r = r \circ s$.

Etudier la réciproque.

Exercice 4

Montrer que $\varphi : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.

Pour aller plus loin : Trouver un antécédent de X^2 et calculer $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 5

Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$, telles que $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t} dt$ converge.

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

2. Montrer que $\varphi : \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt \end{cases}$ est définie et constitue un produit scalaire.

3. On définit sur $[0, +\infty[$ les fonctions $L_0(x) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$. Montrer que L_n est polynomiale de degré n .
4. Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale.

Exercice 6

Montrer que $\varphi : P \mapsto P + (X-1)P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver ses éléments propres et déterminer si φ est diagonalisable.

Exercice 7

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $a \in \mathbb{R}$ et u un vecteur unitaire de E , on pose $f_a : x \mapsto x + a\langle x, u \rangle$.

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de E .
2. Montrer que $A = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ est stable pour la loi \circ et commutatif.
3. Calculer f_a^p
4. Montrer que f_a est inversible ssi $a \neq -1$.
5. BONUS : donner l'interprétation géométrique du cas $a = -1$.

Exercice 8

Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p \circ q = 0$.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
2. Montrer que $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$.
3. Montrer que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$

Exercice 9

On donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $\sigma = ab + bc + ac, s = a + b + c$.

1. Montrer que M est orthogonale ssi $\sigma = 0$ et $s \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi $\sigma = 0$ et $s = 1$.
3. (*) Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : P \mapsto (3 - X)P'(X) - P(X) + X^2P''(X)$ définie sur E .

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Donner la matrice de f dans la base canonique.
3. Est-il diagonalisable ?
4. f est-il un automorphisme ?

Exercice 11

Soit n un entier naturel impair et $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(E) : (X^n + 1)P(X) = P(X^2)$.

1. Montrer que le polynôme $X^n - 1$ vérifie la relation (E) .
2. Déterminer le degré du polynôme P .
3. Notons ω une racine n ième de -1 . Montrer que $-\omega$ est racine de P .
4. Quels sont tous les polynômes vérifiant (E) ?

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel, f et g des endomorphismes de E .

1. Montrer que toute valeur propre non nulle de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.

2. Montrer que si E est de dimension finie, toute valeur propre de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.

3. Dans cette question $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \mapsto XP$ et $g : P \mapsto P'$.

Montrer que f et g sont des endomorphismes de E . Montrer que 0 est valeur propre de $f \circ g$. 0 est-il valeur propre de $g \circ f$? Conclure.

Exercice 13

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.
2. f est-il surjectif?
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 14

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles.

On considère $\varphi : (f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ définie sur $E \times E$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on pose $I(a, b, c) = \int_{-1}^1 (|x| - ax^2 - bx - c)^2 dt$. Trouver (a, b, c) pour que $I(a, b, c)$ soit minimale.
3. Calculer ce minimum.

Exercice 15

Soient $n, d \in \mathbb{N}$ avec $d \leq n$.

Soit Q un polynôme de degré d et f_Q définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f_Q(P) = (P \times Q)^{(n)}$.

1. Montrer que f_Q est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que f_Q soit un automorphisme.
3. Dans le cas où $n = 2$ et $Q = X - 1$, trouver les éléments propres de f .
4. Même question dans le cas $n = 2$ et $Q = X^2 - 1$.
5. A quelle(s) condition(s) sur Q , f est-il diagonalisable.

Exercice 16

Soit $E = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des endomorphismes de \mathbb{C} considéré comme un \mathbb{R} -espace vectoriel.

1. Montrer que $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \mid a, b \in \mathbb{C}\}$.

2. Déterminant et trace de $f_{a,b}$.

3. CNS pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable?

Exercice 17

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2Id = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.
3. On suppose maintenant que E est de dimension finie.
Montrer que $\text{Im}(f + Id) = \ker(f - 2Id)$.

Exercice 18

On pose $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\varphi : \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt \end{cases}$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soient $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux.
3. Soit $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$. Calculer $\inf_{f \in E_{a,b}} (\int_0^1 (f^2 + f'^2))$.

Exercice 19

1. Montrer que $\forall (u, v, x, y) \in \mathbb{R}^4 \quad (ux + vy)^2 \leq (u^2 + v^2)(x^2 + y^2)$

2. Soit E un espace euclidien de dimension 2. On note S l'ensemble des vecteurs unitaires de E . Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

(a) Montrer que $\forall x \in S \quad \|f(x)\| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

(b) On pose alors $N(f) = \sup_{x \in S} \|f(x)\|$. Déterminer $N(f)$ lorsque M est diagonale.

(c) Que vaut $N(f)$ si f est une isométrie?