

**Exercice 1**

Une variable aléatoire suit une loi géométrique de paramètre  $p$ . Donner l'espérance de  $Y = X(X-1) \dots (X-r+1)$  où  $r \in \mathbb{N}$  est fixé supérieur à 2.

**Exercice 2**

Coralie se lève tous les matins pour aller au lycée avec une probabilité  $\frac{1}{3}$  d'être en retard. Lorsque c'est le cas, elle prend le bus. Sinon elle se rend à l'école à pied avec une probabilité de  $\frac{2}{5}$ .

On note  $B$  l'événement "Coralie prend le bus" et  $R$  l'événement "Coralie est en retard".

- Calculer  $\mathbb{P}(B)$  et  $\mathbb{P}_B(R)$ .
- On observe ces faits pendant 180 jours et on note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où Coralie prend le bus.  
Reconnaître la loi de  $X$ , calculer son espérance, sa variance. Combien de fois, en moyenne, est-elle allée au lycée à pied ?

**Exercice 3**

- Dans une urne contenant  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ , on tire, successivement et avec remise,  $p$  boules. On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au maximum des  $p$  numéros tirés.

Décrire  $(\Omega, \mathbb{P})$  modélisant l'expérience. Calculer  $\mathbb{P}(X \leq k)$  pour  $1 \leq k \leq N$  et en déduire la loi de  $X$ .

- On note  $u_n = \sum_{k=1}^n k^a$  pour  $a > -1$ . Montrer que  $u_n \sim_{+\infty} \frac{n^{a+1}}{a+1}$ .

**Exercice 4**

Une urne contient  $4n$  jetons numérotés de 1 à  $4n$ . Les jetons de 1 à  $n$  sont rouges, ceux de  $n+1$  à  $2n$  sont verts, et les autres sont blancs. On tire successivement et sans remise  $n$  jetons. On note  $A$  l'événement "au moins un des jetons tirés est vert", et, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $T_k$  l'événement "on tire pour la première fois un jeton vert au  $k$ -ième tirage".

- Décrire un univers  $\Omega$  adapté à l'expérience aléatoire, et donner son cardinal.
- Calculer la probabilité de l'événement  $A$ .
- (a) Calculer  $P(T_1)$ .  
(b) Calculer  $P(T_n)$ .  
(c) Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P(T_k) = \frac{(4n-k)!(3n)!n}{(4n)!(3n-k+1)!}$ .

**Exercice 5**

Soit  $c \in \mathbb{N}^*$ .

Une urne contient à l'instant initial 1 boule blanche et 1 boule noire. On effectue une suite de tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on rajoute  $c$  boules blanches dans l'urne et de même pour les boules noires.

On note  $X_i$  la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on tire un boule blanche au  $i$ ème tirage, et 0 sinon.

- Donner la loi et l'espérance de  $X_1$ .
- Que représente  $Z_p = \sum_{i=1}^p X_i$  ? Déterminer  $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 | Z_p = k)$ .
- Montrer que  $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}$ .
- Donner la loi de  $X_i$  pour  $i \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 6**

La cible d'un jeu de fléchette est constituée d'une zone jaune et d'une zone verte ; la probabilité d'atteindre la zone verte, quand la cible est atteinte, est de  $\frac{1}{2}$ .

Le joueur  $A$  atteint toujours la cible et on note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour atteindre la zone verte.

Le jour  $B$  atteint la cible avec une probabilité  $p \in [0, 1]$ .

- Donner la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
- Donner la probabilité que  $B$  atteigne la zone verte.
- Le gagnant est celui qui atteint la zone verte en premier.  $A$  commence : donner la probabilité qu'il gagne. Le jeu finit-il ?

**Exercice 7**

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets  $S_1, S_2, S_3$  d'un triangle. A  $n=0$  il est en  $S_1$ .

S'il est en  $S_2$  ou en  $S_3$  à l'étape  $n$ , il sera en  $S_2$  l'étape  $n+1$ . S'il est en  $S_2$ , il a une probabilité  $\frac{1}{4}$  d'aller en  $S_1$ , idem pour  $S_3$  et une probabilité  $\frac{1}{2}$  de rester en  $S_2$ .

On note respectivement  $a_n, b_n, c_n$  les probabilités pour que le mobile soit en  $S_1, S_2, S_3$  à l'étape  $n$ , et  $T_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

Montrer qu'il existe une matrice  $M$ , dont on donnera les éléments caractéristiques, telle que  $T_{n+1} = MT_n$ . Calculer  $M^n$  puis  $T_n$  ainsi que les limites de  $(a_n), (b_n)$  et  $(c_n)$ .

**Exercice 8**

On considère une urne contenant  $n-1$  boules noires et une boule blanche.

- On effectue une succession de tirages avec remise et on note  $T$  le variable aléatoire donnant le rang de premier tirage amenant une boule blanche. Donner les valeurs prises par  $T$ , sa loi, son espérance et sa variance.
- On effectue maintenant des tirages sans remise. Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le rang du tirage de la boule blanche. Donner les valeurs prises par  $X$ , sa loi, son espérance et sa variance.

On note  $Y$  la variable donnant le nombre de boule noire restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$  et  $n$ . Donner l'espérance et la variance de  $Y$ .

**Exercice 9**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$  dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de  $X$  et  $Y$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que  $E(2^{X+Y})$  existe et la calculer.

**Exercice 10**

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendante, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

Prouver que  $\forall a > 0 \mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - E(Y_1) \right| > a \right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$ .

3. Application. On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

A partir de quel nombre de tirage peut on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Indication : considérer la suite  $(Y_n)$  de variables aléatoires de Bernoulli où  $Y_n$  mesure l'issue du  $n$ ème tirage.

**Exercice 11**

Les deux questions sont indépendantes.

1. (a) Soit  $X_1, X_2$  deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .  
Déterminer la loi de  $X_1 + X_2$ .
- (b) En déduire l'espérance et la variance de  $X_1 + X_2$ .
2. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires. On suppose que  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
On suppose  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $(Y = m)$  est une loi binomiale de paramètre  $m, p$ .  
Déterminer la loi de  $X$ .

**Exercice 12**

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés de telle manière que la probabilité d'obtenir 6 est  $\frac{1}{2}$ .

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité pour que le dé soit pipé ?

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé  $n$  fois et on obtient  $n$  fois le chiffre 6. Quel est la probabilité  $p_n$  que ce dé soit pipé ?

3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter.