Systèmes linéaires et matrices

Antoine Louatron

Table des matières

I Systèmes linéaires **3**
I.1 Vecteurs colonnes . . . 3
I.2 Systèmes linéaires . . . 3
I.3 Vect . . . 4

II Résolution d'un système **4**
II.1 Opérations élémentaires . . . 4
II.2 Pivot de Gauss . . . 5
II.3 Rang . . . 6
II.4 Solutions d'un système . . . 6

Dans tous le chapitre on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Plus précisément, chaque énoncé faisant apparaitre $\mathbb{K}$ peut être transformé en deux énoncé : un en remplaçant $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$ et l'autre en remplaçant $\mathbb{K}$ par $\mathbb{C}$.

I Systèmes linéaires

I.1 Vecteurs colonnes

I.1.1 Définition
Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}$. C'est l'ensemble des vecteurs colonnes à n coordonnées et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

I.1.2 Exemple
$\mathbb{R}^2$ représente l'ensemble des vecteurs du plan, repérés par leurs deux coordonnées. On peut aussi considérer $\mathbb{R}^2$ comme l'ensemble des points du plan, repérés par leurs coordonnées (dans un ROND)

$\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des vecteurs de l'espace.

I.1.3 Définition
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. on définit $X + X' = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix}$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire (un nombre) on pose $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.

I.1.4 Exemple

1. Calculer $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Décomposer sous forme d'une somme $\begin{pmatrix} y+z \\ y \\ 3+z \end{pmatrix}$ (but : pouvoir factoriser chaque vecteur de la somme par x et y respectivement).
3. Qu'est-ce que l'ensemble des points dont les coordonnées sont de la forme $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

I.2 Systèmes linéaires

I.2.1 Exemple

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 8x - 4y = 12 \end{cases}$

I.2.2 Définition
Un système linéaire à n équations et p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un ensemble d'équation de la forme

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 \ldots a_{1,p}x_p &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{n,1}x_1 \ldots a_{n,p}x_p &= b_n \end{aligned}$$

où $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est la famille des inconnues et les $a_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. Le vecteur $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ est le vecteur second membre.

Une solution de ce système est un vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ tels que les n équations soient simultanément vraies. L'ensemble des solutions de ce système est un ensemble de vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^p$.

I.2.3 Définition
Un système est dit homogène ssi le second membre est nul. A un tel système on associe une matrice A qui est le tableau de nombre

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$

I.2.4 Exemple
Donner la matrice associée au système $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$.

I.2.5 Définition
Soit S un système homogène ou non. Sa matrice augmenté est $(A|B)$, c'est à dire la matrice A du système homogène associé que l'on augment d'une colonne : la colonne second membre.

Explication On peut ainsi écrire un système sans écrire les inconnues. On gagne en compacité.

I.3 Vect

I.3.1 Exemple
Résoudre le système $-2x + y - 3 = 0$. Combien possède-t-il de solutions ? De quelle forme ?

I.3.2 Définition
Soit $p \in \mathbb{N}$ non nul.

1. *Soit $U \in \mathbb{K}^p$. L'ensemble $\{\lambda U |\ \lambda \in \mathbb{K}\} = \{X \in \mathbb{K}^p |\ \exists \lambda \in \mathbb{K} X = \lambda U\}$ (les vecteurs proportionnels à U) est noté* $\mathrm{Vect}(U)$.
2. *Soient $U_1, \dots, U_r$ des vecteurs de $\mathbb{K}^p$. On note $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_r)$ l'ensemble $\{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i |\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}\} = \{X \in \mathbb{K}^p |\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i\}$.*

I.3.3 Exemple
Plaçons nous dans le plan munit d'un ROND $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (et dont on idenfie les vecteurs avec $\mathbb{R}^2$).

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ est la droite vectorielle (interprétation : l'ensemble des points aux extrémités de ces vecteurs est une droite) passant par O et dirigée par $\vec{u}$.
2. Interpréter $A + \mathrm{Vect}(\vec{u}) = \{A + \lambda \vec{u} |\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ où A est un point fixé.
3. Quest-ce que $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$?

II Résolution d'un système

II.1 Opérations élémentaires

II.1.1 Définition
Une opération élémentaire sur un système $\mathcal{S}$ à n équations et p inconnues est

1. *Un échange de ligne : on le note $L_i \leftrightarrow L_j$. On échange simplement les équations numéro i et j (pour i, j deux indices $\leqslant n$ le nombre de ligne).*
2. *Multiplication par un scalaire : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ pour un $\lambda \neq 0$*
3. *Combinaison de ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque.*

Un système obtenu à partir de $\mathcal{S}$ par opération(s) élémentaire(s) est dit équivalent à $\mathcal{S}$.

II.1.2 Théorème
Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.

Preuve.
Chacune des opérations élémentaire est "réversible", c'est à dire que l'on peut retrouver le système de départ par opération élémentaire.

Plus précisément :

- Si on échange deux lignes, les solutions ne changent clairement pas.
- Si on multiplie $L_i : a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i$ par lambda $\neq 0$ on obtient l'équation $\lambda a_{i,1}x_1 + \cdots + \lambda a_{i,p}x_p = \lambda b_i$ que l'on peut simplifier par λ qui est non nul pour retrouver l'équation de départ.
- Si on remplace le système $\begin{cases} L_i \\ L_j \end{cases}$ par $\begin{cases} L_i + \lambda L_j \\ L_j \end{cases}$ alors L_j est encore vérifiée. Montrons que l'équation L_i est encore vraie. On a maintenant $(a_{i,1} + \lambda a_{j+1})x_1 + \cdots + (a_{i,p} + \lambda a_{j,p})x_p = b_i + \lambda b_j$. En séparant les termes qui font apparaître λ des autres on obtient $a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p - b_i = \lambda(b_j - a_{j,1}x_1 + \cdots + a_{j,p}x_p) = 0$, c'est à dire que L_i est vérifiée. ∎

II.1.3 Effet sur les matrices

Si A est la matrice augmentée de $\mathcal{S}$ et A' la matrice augmentée de $\mathcal{S}'$ un un système obtenu par opérations élémentaires sur les lignes, alors la matrice A' s'obtient par les mêmes opérations sur la matrice A.

II.1.4 Exemple

Opérations élémentaires sur $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ pour résoudre le système.

II.2 Pivot de Gauss

II.2.1 Définition

Soit A une matrice.

1. *On dit que A est échelonnée par ligne si :*
   - *quand une ligne est nulle, toutes les suivantes le sont aussi.*
   - *le premier coefficient non nul de chaque ligne (appelé pivot) est strictement à droite de celui de la ligne précédente.*

   La matrice à une forme en escalier inversé : dans la colonne du premier coefficient non nul d'une ligne, il n'y a que des 0 en dessous.

II.2.2 Exemple

Réduire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ par lignes.

II.2.3 Réduction par pivot

Soit A la matrice d'un système homogène (ou la partie de droite de la matrice augmentée d'un système linéaire).

On remarque d'abord que la première colonne de A n'est pas nulle (sinon on a en fait une inconnue de moins).

- On place un coefficient non nul en position $1, 1$ par échange de ligne éventuel.
- On effectue les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}L_1}$. Alors la première colonne ne possède plus qu'un seul coefficient non nul : le premier.
- On recommence l'opération sur la "sous-matrice" composée des lignes 2 à n et des colonnes 2 à p.

On arrête quand il ne reste plus de ligne ou de colonne dans la sous-matrice.

II.2.4 Définition

Une matrice échelonnée est dite réduite si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls coefficients non nuls dans leur colonne.

Un système est dir échelonné réduit par ligne ssi sa matrice (non augmentée) l'est.

II.2.5 En pratique

A partir d'une matrice échelonnée, on la réduit par pivot de Gauss en parant non plus de la première ligne mais de la dernière et en éliminant les coefficients au dessus des pivots (qui sont connus cett fois, nul besoin d'échange de lignes).

II.2.6 Définition

Deux matrices A et A' sont dites équivalentes par lignes si elles peuvent se déduire l'une de l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim A'$.

II.2.7 Remarque

Il s'agit d'une relation dite relation d'équivalence entre les matrices. Soient A, A', A'' des matrices de même taille.

— Reflexivité : $A \sim A$.

— Symétrie : Si $A \sim A'$ alors $A' \underset{A}{\sim}$.

— Transitivité : Si $A \sim A'$ et $A' \sim A''$ alors $A \sim A''$.

La classe d'équivalence d'une matrice A est l'ensemble de toutes les matrices qui lui sont équivalente par lignes.

II.3 Rang

II.3.1 Théorème
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite. Autrement dit, dans la classe d'équivalence d'une matrice, une et une seule matrice est échelonnée réduite.

Preuve.
Existence : via le pivot de Gauss + réduction. Unicité : admis. ■

II.3.2 Exemple
Réduire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

II.3.3 Application à la résolution de systèmes

Pour résoudre un système, effectue des opérations élémentaires sur le système jusqu'à ce que la matrice (PAS la matrice augmentée, seulement la partie de gauche de celle-ci) obtenue soit réduite.

II.3.4 Définition
Le rang d'une matrice M est le nombre de lignes non nulle de sa matrice échelonnée réduite par lignes. C'est également le nombre de pivots.

Le rang d'un système $\mathcal{S}$ est le rang de la matrice associée au système homogène (la partie "de gauche" de la matrice augmentée).

On note $\mathrm{rg}(M)$ *ou* $\mathrm{rg}(\mathcal{S})$.

II.3.5 M-Remarque

Le rang d'un système à n équations et p inconnues (ou le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) est inférieur à n ET à p. En effet il ne peut y avoir plus de ligne non nulle que de ligne et il ne peut y avoir qu'un pivot par colonne.

Pour calculer le rang d'une matrice, il suffit de l'écheloner, car les opérations de réductions ("remontée") ne changent pas le nombre de pivot (ni leurs positions d'ailleurs)

II.4 Solutions d'un système

II.4.1 Définition
Soit $\mathcal{S}$ un système homogène dont la matrice est échelonnée réduite. Les inconnues principales de $\mathcal{S}$ sont les inconnues qui correspondent à un pivot. Il y en a $\mathrm{rg}(\mathcal{S})$. *Les autres inconnues sont dites secondaires (on les appelle aussi paramètre).*

II.4.2 Exemple
Réduire le système suivant en identifiant clairement les inconnues principales et secondaires :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +2y & -z & +t & =0 \\ 2x & +3y & -z & -t & =0 \\ & y & +z & -t & =0 \end{array}\right.$$

Présenter le résultat sous forme $\mathrm{Vect}(\vec{u})$.

II.4.3 Résolution d'un système réduit

Pour résoudre un système homogène réduit, il suffit de considérer les inconnues secondaires comme paramètre et d'exprimer les inconnues principales en fonction des secondaires.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les paramètres (ou inconnues secondaires), alors les solutions de $\mathcal{S}$ sont de la forme $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_r C_r = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_r)$ où $C_1, \ldots C_r$ sont des vecteurs fixe de $\mathbb{K}^n$ (n le nombre d'inconnues)

II.4.4 Exemple
Résoudre $x + y + 2 = 0$. Interprétation géométrique, $A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$.

II.4.5 Système avec second membre

On réduit la matrice augmentée. Il y a deux cas :

1. Une ligne nulle de la matrice réduite ne correspond pas à une constante nulle dans le colonne du second membre. Dans ce cas le système est dit incompatible et ne possède pas de solution.
2. Le système est compatible, c'est à dire que l'on obtient $\mathrm{rg}(\mathcal{S})$ équations et $n - \mathrm{rg}(\mathcal{S})$ équations nulles. Dans ce cas l'ensemble des solutions est de la forme $X_p + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_r C_r$ où $C_1, \ldots C_r$ en reprenant les notations précédente, et où X_p est UNE solution particulière de $\mathcal{S}$.

II.4.6 Exemple

Résoudre le système $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$. Modifier pour qu'il y ait des solutions.