Devoir maison n°0

A rendre le 07/09

Exercice 1 (Algèbre linéaire et géométrie)
On note $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments seront notés en colonne.

On pose également $\vec{e}_1=\frac{1}{3}(\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+2\vec{k}), \vec{e}_2=\frac{1}{3}(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}-2\vec{k})$ et $\vec{e}_3=\frac{1}{3}(2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k})$.

Pour $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in\mathbb{R}^3$, on notera $\vec{u}_1.\vec{u}_2$ le produit scalaire de ces deux vecteurs.

1. Montrer que $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est une base orthonormée de l'espace. On donnera 6 égalités faisant intervenir le produit scalaire.

   Est-ce que $\mathcal{B}$ est une base directe ?
2. On note $A=\text{Mat}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Calculer A^tA. Qu'en déduire pour A ?
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
   (a) Que valent $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$, $f(\vec{\jmath})$?
   (b) Rappeler comment on calcule $f(\vec{u})$ où $\vec{u}$ est une colonne de taille 3.
   (c) Calculer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.
   (d) Trouver l'ensemble F des vecteurs fixes par f ie l'ensemble $\{\vec{u}\in\mathbb{R}^3|\ f(\vec{u})=\vec{u}\}$. On le décrira comme $F=\text{Vect}(\vec{u}_1)$ où $\vec{u}_1$ est une colonne dont la première coordonnée vaut 1.

   Expliquer pourquoi la condition sur la première coordonnée détermine $\vec{u}_1$ de manière unique.
4. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+z=0$. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par f ie $f(\mathcal{P})\subset\mathcal{P}$ ou encore pour tout $\vec{u}\in\mathcal{P}$, on a encore $f(\vec{u})\in\mathcal{P}$.

   On pourra déterminer une base de $\mathcal{P}$ si besoin.
5. Montrer que F est stable par f et que $F\oplus\mathcal{P}=\mathbb{R}^3$.
6. La question 4 montre que l'on peut définir $g:\begin{cases}\mathcal{P} & \to & \mathcal{P}\\ x & \mapsto & f(x)\end{cases}$ (comprendre : on a le droit le mettre cet ensemble d'arrivée). On dit que g est l'endomorphisme **induit** par f sur le sous-espace (stable) $\mathcal{P}$.
   (a) Donner une base orthonormée $(\vec{v}_1,\vec{w}_1)$ de $\mathcal{P}$ telle que $(\vec{u}_1,\vec{v}_1,\vec{w}_1)$ soit une base directe de l'espace (question bonus : pourquoi est-ce forcément une base ?).
   (b) Donner la matrice de g dans la base $(\vec{v}_1,\vec{w}_1)$ et montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.
   (c) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{u}_1',\vec{v}_1,\vec{w}_1)$ où $\vec{u}_1'=\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$ est le vecteur unitaire de même direction et sens que $\vec{u}_1$.

   Donner l'interprétation géométrique de f.

Exercice 2 (Analyse : fonction et série)
Dans cet exercice, toute mention explicite à la fonction exp est interdite. On se place dans le cadre (très improbable), où on connaît le cours théorique sur les fonctions continues, dérivables, sur les séries numériques, mais sans avoir jamais entendu parler de exp ni ln.

Prenez ça comme un exercice de style, ou plutôt comme une volonté de définir exp sans admettre aucun résultat (sauf ceux explicitement rappelés dans l'énoncé).

Partie I : définition, propriété fondamentale

Pour $n\in\mathbb{N}$ on définit la fonction polynomiale $S_n:\begin{cases}\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\end{cases}$.

Exhiber les premières fonctions $(S_0,S_1,S_2,\dots)$ au brouillon et éventuellement deviner la limite de $S_n(x)$ quand $n\to+\infty$ (pour un x fixé).

1. On fixe ici $\alpha\in\mathbb{R}^+$ et on souhaite étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{\alpha^n}{n!}$.
   (a) Prouver que $(S_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
   (b) Etudier la monotonie de $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$
   (c) Soit $q\in[0,1[$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}q^k$. Pour quels $q\in\mathbb{C}$ ce calcul est-il encore valable ?

(d) On pose $u_n = \frac{\alpha^n}{n!}$. Montrer que $u_n = o_{+\infty}(\frac{1}{2^n})$.

(e) On pose $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant n_0\ 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2^k}$. Après avoir relu la définition d'une limite de suite, expliquer pourquoi cela est possible.

Montrer que pour $n \geqslant n_0$, $S_n(\alpha) \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} u_k + 2$ puis prouver que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{n!}$ converge (ici, finalement, on a admis que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure. Théorème clairement hors de notre portée. Par contre, sa conséquence utilisée ici est du niveau pré-bac).

2. Les questions précédentes permettent de définir la fonction (compliquée, attention) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \end{cases}$

Ainsi la valeur de $f(x)$ est la somme d'une série dont le terme général dépend de x et quand on change x on change en fait toute la série étudiée. On a prouvé que les séries considérées convergent toutes (ici $x \geqslant 0$).

3. Nous allons maintenant prouver la plus importante des propriétés de f (question 3c). Dans cette question on identifie les fonctions polynomiales S_n à des polynômes (ces fonctions sont définies sur un ensemble infini...).

(a) Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $S_n(aX)S_n(bX) = S_n((a+b)X) + \sum_{k=n+1}^{2n} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{a^i}{i!}\frac{b^{k-i}}{(k-i)}$ pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.

(b) En déduire que $|S_n(a)S_n(b) - S_n(a+b)| \leqslant \frac{n\times\max((a+b)^{n+1},(a+b)^{2n})}{(n+1)!}$. Question subsidiaire : que vaut ce max en fonction de la valeur de $(a+b)$?

Indication : on pourra commencer par montrer que $c_k \leqslant \frac{1}{k!}(a+b)^k$ pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.

(c) Montrer que $f(a+b) = f(a)f(b)$.

(d) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a - b \geqslant 0$. Montrer que $f(a-b) = \frac{f(a)}{f(b)}$

Partie II : extension à $\mathbb{R}$ et continuité

1. (a) Calculer $f(0)$ et montrer que $f(1) > 2$.

(b) Montrer que f est croissante en revenant à la définition. Qu'en déduire concernant son signe ?

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x \leqslant S_n(x) - S_n(0) \leqslant xf(x)$. Pour quels x peut-on affirmer $x \leqslant S_n(x) - S_n(0) \leqslant xf(1)$?

(d) En déduire que f est continue en 0. Attention à l'ordre des limites !

2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$, montrer que f est continue en a. On pourra montrer que $f(a+h) \underset{h\to 0}{\to} f(a)$. Attention au fait que f n'est pas définie que sur $\mathbb{R}^+$.

3. On étend la fonction f à $\mathbb{R}_-^*$ en posant $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$ pour les $x < 0$. La fonction f est maintenant définie par cas : pour $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) \text{ si } x \geqslant 0 \\ \frac{1}{f(-x)} \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}$. Attention au cas de 0. On ne peut a priori calculer que les limites à droites et à gauche, il faut s'assurer qu'elles sont égales à $f(0)$.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

5. Montrer que 3c est encore vraie pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ (3 cas à traiter au moins).

6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(an) = f(a)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ puis étudier la limite de f en $+\infty$ (si elle existe).

7. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, on a $f(x) \geqslant S_n(x)$ pour tout n et en déduire que pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, $x^N = o_{+\infty}(f(x))$.

Partie III : dérivabilité

On souhaite maintenant étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. Commençons par la dérivabilité en 0.

1. Première méthode.

(a) Montrer que $\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} 1 = f(0)$ directement. On pourra utiliser la partie II, question 1

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. En réécrivant le taux d'accroissement pour faire apparaître des images de nombres positifs par f, calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(c) Qu'avons nous prouvé en terme de dérivabilité ?

2. Deuxième méthode, en revenant à S_n.
   (a) Pour g une fonction $\mathcal{C}^2([a,x],\mathbb{R})$ (pour $a, x \in \mathbb{R}$ avec $a < x$), rappeler la formule de Taylor avec reste intégral et montrer que $|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leqslant M\frac{|x-a|^2}{2!}$ où $M = \max\limits_{t\in[a,x]} |f''(t)|$.

   L'existence de M est la conséquence d'un théorème de PTSI que l'on admet dans le programme (mais dont la démonstration est à notre portée). Vous citerez clairement ce théorème.

   (b) Montrer que $S_n : x \mapsto S_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et calculer S'_n et S''_n. On pourra supposer que $n \geqslant 2$.

   (c) Soit $x > 0$. Montrer que $|S_n(x) - S_n(0) - xS'_n(0)| \leqslant S_{n-2}(x)\frac{x^2}{2}$.

   (d) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$. On peut conclure comme pour la première méthode.

3. Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, conclure quand à la dérivabilité et montrer que $f' = f$.

   Avec la condition $f(0) = 1$, f est donc l'unique solution (sur $\mathbb{R}$) du problème de Cauchy $y' - y = 0$ et $y(0) = 1$. Remarquez cependant que la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution à un problème de Cauchy vu en PTSI suppose connue la fonction exponentielle.

Partie IV : réciproque

On souhaite maintenant étudier rapidement la réciproque de la fonction f.

1. Donner un tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en y incluant les limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. On note $g : I \to \mathbb{R}$ la réciproque de f.
3. Justifier la continuité de g et tracer un tableau de variations complet incluant les limites de g.
4. Montrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Etablir que pour tout $a, b \in I$, $g(ab) = g(a) + g(b)$.