Table des matières

I Applications linéaires

I.1 Propriétés générales

Définition 1
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire ssi

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall x, y \in E \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

On a alors $f(0_E) = 0_F$.

Si $F = \mathbb{K}$ on dit que f est une **forme linéaire**. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 1

1. $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Quand elle existe, la composée de deux applications linéaire est linéaire.
3. Quand elle existe, la bijection réciproque d'une application linéaire est linéaire.

Définition 2
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Son noyau est $\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E | \ f(x) = 0\}$ et son image est $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F | \ \exists x \in E \ y = f(x)\}$.

Proposition 2
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, G un sous-espace de E et H un sous-espace de F.

Alors $f(G)$ et $f^{-1}(H)$ sont des sous-espaces de F et E respectivement. En particulier $\ker(f)$ est un sous-espace de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace de F.

I.2 Equations linéaires

Définition 3
Soit E un espace vectoriel et $a \in E$.

1. $t_a \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a + x \end{array} \right.$ est appelée translation de vecteur a. Cette application n'est pas linéaire mais est appelée application affine.
2. Soit F un sous-espace de E. L'ensemble $t_a(F) = a + F = \{a + x | \ x \in F\}$ est un **sous-espace affine** de direction F.

I.3 Applications linéaires et dimension

Proposition 3
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit H un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. $f_H : H \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme.

Théorème 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et supposons E de dimension finie. Alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Corollaire 1
Soit E, F des espaces de **même** dimension et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Dans le cas où f est un endomorphisme, les dimensions de E et F sont évidemment égales et ce résultat s'applique.

Corollaire 2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie.

$$f \in Gl(E) \iff \exists g \in \mathcal{L}(E) \ f \circ g = Id_E \iff \exists g \in \mathcal{L}(E) \ g \circ f = Id_E$$

II Bases en dimension quelconques

II.1 Familles libres

Définition 4
Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque et X un ensemble (quelconque lui aussi). Soit $(u_i)_{i\in X}$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est dite libre ssi pour tout $I\subset X$ ensemble **fini**, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

D'une manière équivalente, aucun des u_i n'est une combinaison linéaire (finie, évidemment...) des autres u_j.

Proposition 4
Toute famille de polynômes tous non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.

II.2 Familles génératrices

Définition-Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A\subset E$. L'ensemble des sous-espaces de E qui contiennent A possède un minimum pour l'inclusion. Cet espace est noté $\mathrm{Vect}(A)$ et est appelé espace vectoriel engendré par A.

On peut le décrire comme l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de A.

Définition 5
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X un ensemble et $(e_i)_{i\in X}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(e_i)_{i\in X}$ est génératrice de E ssi pour tout $u\in E$ on peut trouver un ensemble **fini** $I\subset X$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires tels que $u=\sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i$.

Ainsi tout élément de E est une combinaison linéaire (la somme est finie) d'éléments de $(e_i)_{i\in X}$ et on a $E=\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in X})$.

II.3 Bases

Définition 6
Soit X un ensemble et E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $\mathcal{B}=(e_i)_{i\in X}$ est une base de E ssi $(e_i)_{i\in X}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Dans ce cas, pour tout $u\in E$ il existe un unique ensemble fini $I\subset X$ et une unique famille de scalaires $(x_i)_{i\in I}$ (appelée coordonnées de u dans $\mathcal{B}$) tels que $u=\sum\limits_{i\in I}x_i e_i$.

Proposition 5
$\mathcal{B}=(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée base canonique.

Proposition 6
Soit $(e_i)_{i\in X}$ une famille de vecteurs de E.

$(e_i)_{i\in X}$ est une base ssi $(e_i)_{i\in X}$ est libre et maximale (une famille qui la contient strictement n'est plus libre) ssi $(e_i)_{i\in X}$ est génératrice de E et minimale (une sous famille stricte n'est plus génératrice de E)

III Sous-espaces

III.1 Supplémentaires

Définition 7
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F,G deux sous-espaces. La somme de F et G est $F+G=\{x_F+x_G|\ x_F\in F \text{ et } x_G\in G\}$. C'est un espace vectoriel et on a même $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$.

Définition 8
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F,G deux sous-espaces. On dit que F et G sont supplémentaires dans E et on note $E=F\oplus G$ ssi

$$\forall x\in E\exists!(x_F,x_G)\in F\times G\ x=x_F+x_G$$

Avec ces notations, x_F est le projeté de x sur F dans la direction G (ou parallèlement à G) et x_G le projeté de x sur G dans la direction F.

Proposition 7
Dans le cas de la dimension finie, $E=F\oplus G$ ssi la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E. On dit que la base obtenue (par concaténation) est **adaptée** à la somme $F\oplus G$.

On a alors évidemment

$$\dim(E)=\dim(F)+\dim(G)$$

Corollaire 3
En dimension finie (ou pas, mais on ne l'a pas prouvé), tout sous-espace possède au moins un supplémentaire.

Théorème 2 (Théorème de)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F,G deux sous-espaces de dimensions finies ; Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$$

Corollaire 4
Dans un espace de dimension finie, on a $E=F\oplus G \iff \begin{cases}F+G=E\\ \dim(F)+\dim(G)=\dim(E)\end{cases} \iff \begin{cases}F\cap G=\{0_E\}\\ \dim(F)+\dim(G)=\dim(E)\end{cases}$.

III.2 Hyperplans

Définition 9
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace H de E est appelé hyperplan ssi H admet une droite comme supplémentaire.

Proposition 8
Les hyperplan de E de dimension $n > 0$ sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.

Théorème 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E.

Pour un hyperplan H il existe $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ non nul tel qu'une équation de H dans la base $\mathcal{B}$ soit $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ ce qui signifie que $x \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{B}$) appartient à H ssi $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$.

Toutes les autres équations de H sont proportionnelles à celle-ci.

Théorème 4
Soit E de dimension $n > 0$ et $p \leqslant n$.

1. l'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n-p$.
2. réciproquement, tout sous-espace de dimension p est l'intersection de $n-p$ hyperplans (et possède donc un système d'équation à $n-p$ équations et n inconnues dans une base fixée de E).

III.3 Sommes directes d'espaces vectoriels

Définition 10
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1 \dots F_p$ des sous espaces de E.

1. La somme des espaces $(F_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i = \{u_1 + \cdots + u_p |\ u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$ et $\dots$ et $u_p \in F_p\}$. C'est le sous espace de E engendré par les F_i
2. On dit que la somme $F = \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** et on note $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$ ssi tout vecteur $u \in F$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $u = u_1 + \cdots + u_p$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!] u_i \in F_i$.

La somme et la somme directe sont associatives, ce qui permet de justifier a posteriori l'utilisation de $\sum$ et $\bigoplus$

Théorème 5
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E. La somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe ssi $\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod\limits_{i=1}^{p} F_i$ $u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E$.

Ainsi il suffit de vérifier que le vecteur nul possède une unique écriture sous forme de somme.

Définition-Proposition 2
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E, de dimension finie. Notons $F = \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$.

$F = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$ ssi la concaténation de bases des F_i est une base de F.

Une telle base de F est dite **adaptée** à la somme directe.

III.4 Projecteurs, symétries

Définition 11
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient également F, G deux sev supplémentaires. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

L'application $p : x \mapsto x_F$ est appelé projecteur sur F parallèlement à G (ou de direction G).

L'application $s : x \mapsto x_F - x_G$ est appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G).

Proposition 9
Soit E un $\mathbb{K}$-ev

1. Soit p le projecteur sur F de direction G. Alors $p \in \mathcal{L}(E)$, $p^2 = p$, $\ker p = G$ et $\operatorname{Im} p = F = \ker(Id_E - p)$.
2. Réciproquement si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$ alors f est le projecteur sur $\operatorname{Im}(f) = \ker(f - Id)$ dans la direction $\ker(f)$

Proposition 10
Soit E un $\mathbb{K}$-ev

1. Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction G. Alors $s \in GL(E)$ et $s^2 = Id_E$ ie. $s = s^{-1}$. De plus $F = \ker(s - Id_E) = \{x \in E |\ s(x) = x\}$ et $G = \ker(s + Id) = \{x \in E |\ s(x) = -x\}$.
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $f^2 = Id_E$ alors f est la symétrie par rapport à $\ker(f - Id_E)$ parallèlement à $\ker(f + Id_E)$ qui sont donc supplémentaires dans E.

III.5 Projection et espaces en somme directe

Définition 12
Soient $F_1, \dots F_p$ des sous-espaces de E vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Pour $x \in E$, on pose $x = x_1 + \cdots + x_p$ l'unique décomposition en somme telle que $\forall i \in [\![1,p]\!] x_i \in F_i$.

La projection de x sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{p} F_i$ est x_j. Le projecteur associé est $p_j : x \mapsto x_j$.

Proposition 11
Avec les notations de la définition précédente, $\forall (k,l) \in [\![1,p]\!]^2 \ k \neq l \Rightarrow p_k \circ p_l = 0$ et $\sum_{j=1}^{p} p_j = Id_E$.

IV Matrices

IV.1 Matrice d'une application linéaires

Définition 13
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de dimension respectives p et n. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F. Soit également $f \in \mathcal{L}(E,F)$. La matrice A de f dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ (noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$) est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

C'est la matrice des coordonnées des $f(e_j)$ dans $u_1, \dots, u_n$, écrites en colonnes.

Si $A = (a_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!] j\in[\![1,p]\!]}$ alors $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$.

Théorème 6
Avec les notations de la définition, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme linéaire.

Théorème 7
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives q, p, n et de bases $\mathcal{B}_E,\ \mathcal{B}_F,\ \mathcal{B}_G$. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

On pose de plus $M_f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $M_g = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = M_g M_f \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Rappel : si $C = AB$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Corollaire 5
f est bijective ssi M_f est inversible et dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = M_f^{-1}$.

IV.2 Matrices semblables

Définition 14
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

On exprime la **nouvelle base** $\mathcal{B}'$ en fonction de l'**ancienne base** $\mathcal{B}$

Théorème 8
Soit E un $\mathbb{K} - ev$ de dimension n et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit également $x \in E$.

On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors

$$X = PX'$$

Théorème 9
Soient E un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors $M' = P^{-1}MP$

Définition 15
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

IV.3 Espaces stables

Définition 16
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. On dit que F est stable par f ssi $f(F) \subset F$.

Théorème 10
Soit F un sous-espace de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E.

On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f)$. F est stable par f ssi $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $0, B, C$ sont des matrices.