I Equations différentielles linaires du premier ordre

I.1 Equations différentielles

Définition 1
Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une ***fonction*** *(dérivable sur un intervalle) et qui fait intervenir à la fois la fonction (notée y le plus souvent) et sa/ses dérivée(s).*

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions qui sont solutions. La variable de la fonction y est souvent notée t ou x.

Exemple 1
1. *L'équation $y' = y^2$ est une équation différentielle.*
2. *On sait que $\sin'' = -\sin$. Ainsi $\sin$ est une solution de $y'' = -y$.*
3. *Si b est une fonction continue sur une intervalle, $y' = b$ possède une infinité de solutions : les primitives de b.*

Exemple 2
Trouver une solution de l'équation différentielle $y' = 2y$.

Plus généralement, trouver une solution de $y' + ay = 0$ où $a \in \mathbb{C}$ est fixé.

I.2 Résolution de l'équation homogène

Définition 2
On appelle équation différentielle linaire du premier ordre une équation de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \qquad (E)$$

avec a, b des fonctions définies sur un intervalle I. L'équation homogène associée à E est

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \qquad (E_H)$$

On appelle solution de E toute ***fonction*** *dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I$ $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées* courbes intégrales *de l'équation.*

Le problème consistant trouver une solution de E vérifiant en plus une condition du type $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$ et $y_o \in \mathbb{K}$) est appel un problème de Cauchy . On parle de condition initiale.

Théorème 1 (Résolution de l'équation homogène)
Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I. Pour une fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ les assertions suivantes sont équivalentes

1. *(E_H) $y'(t) + a(t)y(t) = 0$*
2. *$\exists \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall t \in I$ $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$.*

Ainsi, à chaque scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ correspond exactement une fonction solution y et on remarque que toutes les fonctions solutions sont proportionelles.

Si de plus on donne $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ pour transformer cette équation en problème de Cauchy en lui adjoignant la condition $y(t_0) = y_0$, alors ce problème de Cauchy possède une unique solution.

Sur les courbes intégrales

Soient y_1 et y_2 des solutions de E_H. Pour $t \in I$ quelconque, si $y_1(t) = y_2(t)$ alors y_1 et y_2 sont solutions d'un même problème de Cauchy et donc sont égales.

Ainsi deux solutions d'une même équation différentielle linéaire homogène sont soit égales, soit leur courbes représentatives ne se coupent pas.

Corollaire 1 (Caractérisation de l'exponentielle par une équation différentielle)
Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est la seule fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui vérifie

$$y' = ay \text{ et } y(0) = 1.$$

I.3 Equation avec second membre

On cherche maintenant résoudre l'équation E. On supposera toujours $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

Forme des solutions

Si y_p est une solution (que l'on peut appeler solution particulière) de E et y une autre solution de E, alors on remarque que

$$(y - y_p)' + a(x)(y - y_p) = b(x) - b(x) = 0.$$

C'est à dire que $y - y_p$ est solution de l'équation homogène associée. Ainsi, si on trouve UNE solution y_P de E, alors on trouvera TOUTE les solutions de E en ajoutant cette *solution particulière* une solution générale de l'équation sans second membre. On peut écrire ceci comme

$$y = y_p + y_H$$

où y_H désigne une solution de l'équation homogène. Plus précisément, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{y_P + y_H |\ y_H \text{ est solution de l'équation homogène}\}$$

On a réduit notre problème la recherche d'UNE solution particulière.

Variation de la constante

Pour trouver une solution particulière, on la cherche sous la forme $y_p : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$, c'est à dire avec la constante d'intégration qui est devenue une fonction. On exprime alors le fait que y_p est solution (en remplaçant dans E) pour trouver une équation du genre $\lambda' = \dots$ que l'on résout par un calcul de primitive.

Une solution particulière est alors $t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ où λ a été obtenu par un calcul de primitive. Attention, il ne faut pas oublier de multiplier par la solution homogène $e^{-A(t)}$!

Théorème 2
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Etant donné $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution y de l'équation différentielle E qui vérifie $y(x_0) = y_0$.

Méthode

Pour résoudre une équation du type $y' + ay = b$:

1. On commence par résoudre l'équation homogène associe : $y' + ay = 0$, ce qui se fait par un premier calcul de primitive.
2. On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre. Soit il y en a une évidente, soit via la méthode de variation de la constante. Ceci nécessite un deuxième calcul de primitive.
3. On explicite clairement l'ensemble des solutions demandé (problème de Cauchy, solutions ayant telle ou telle propriété...)

I.4 Réduire le problème de la recherche de y_P

Proposition 1 (Principe de superposition)
Soient $a, b_1, b_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifient $y_1' + ay_1 = b_1$ et $y_2' + ay_2 = b_2$. Alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1 + b_2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λy_1 est solution de $y' + ay = \lambda b_1$.

Passer par les complexes

Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles. Remarquons que si $y = u + iv$ est une fonction à valeurs complexes dérivable (sous forme algébrique) alors $y' + ay = (u + au') + i(v + iv')$ et on peut donc calculer des solutions complexes à une équation à coefficent réel puis ne considérer que la partie réelle ou imaginaire comme solution réelle.

Ainsi pour résoudre $y' + y = \cos x$ on résout $y' + y = e^{ix}$ puis on calcule la partie réelle des solutions trouvées.

II Equations différentielles linéaires du second ordre

La situation se complique singulièrement dès qu'on admet les dérivées seconde. Nous allons donc restreindre fortement notre cadre d'étude. Nous allons considérer les équations différentielles linaires du second ordre de la forme

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On pose

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) \tag{E}$$

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \tag{E_H}$$

E_H est l'*équation homogène associée.* On cherche les fonctions y deux fois dérivables qui vérifient cette relation. On notera $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et dont la dérivée est dérivable. Les problèmes de Cauchy pour ce genre d'équation sont de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + ay' + by & = & f(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y_0' \end{array} \right.$$

II.1 Résolution de l'équation homogène

Proposition 2
Soit $r \in \mathbb{K}$. La fonction

$$y : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & e^{rt} \end{array} \right.$$

est solution de E_H ssi r vérifie $r^2 + ar + b = 0$.

Définition 3
L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est l'équation caractéristique de E.

Théorème 3 (Résolution de l'équation homogène du second ordre, cas complexe)
Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. *Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de E_H ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que*

$$y : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right.$$

2. *Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est solution de E_H ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que*

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{rt} \end{array} \right.$$

Si de plus on se donne $t_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{C}$, alors il existe une unique solution y de l'équation différentielle homogène qui vérifie $y(t_0) = y_0$ ET $y'(t_0) = y_0'$.

Théorème 4 (Résolution d'équations réelles)
Cette fois $a, b \in \mathbb{R}$.

1. *Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{R}$, alors les solutions à valeurs réelles de E_H sont les fonctions*

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right.$$

   avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2. *Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors les solutions à valeurs réelles de E_H sont les fonctions*

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{rt} \end{array} \right.$$

   avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

3. *Si l'équation possède deux solutions non réelles, qui sont donc complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ (sous forme algébrique), alors les solutions de à valeurs réelles E_H sont les fonctions*

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{array} \right.$$

II.2 Résolution de l'équation avec second membre

Forme des solutions

Soient y_1 et y_2 deux solutions de E. Alors $y_1 - y_2$ est solution de E_H :

$$a(y_1 - y_2)'' + b(y_1 - y_2)' + c(y_1 - y_2) = d - d = 0.$$

Ainsi si on dispose d'une solution particulière y_1 de l'équation avec second membre on a

$$\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_0$$

en notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de E et $\mathcal{S}_0$ celui des solutions de E_H.

On dit souvent que la solution générale de l'équation avec second membre est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Théorème 5

1. *Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Alors l'équation différentielle linaire*

$$y'' + ay' + by = f$$

   admet au moine une solution y_1, et l'ensemble de ses solutions est $y_1 + \mathcal{S}_0$ où $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée

2. *Soient $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + ay' + by & = & f \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_0' \end{array} \right.$$

   admet une unique solution.

Proposition 3 (Principe de superposition)
Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifient $y_1'' + ay_1' + by_1 = f_1$ et $y_2'' + ay_2' + by = f_2$. Alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + cb = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

Méthode

Le second membre est de la forme Ae^{kt} avec $A, k \in \mathbb{K}$ des constantes. On cherche y_p sous la forme $P(t)e^{kt}$ où P est :

1. K une constante si k n'est pas solution de l 'équation caractéristique.
2. $t \mapsto Kt$ si k est une racine de l'équation caractéristique (ie e^{kt} est l'une des solution de l'équation homogène)
3. $t \mapsto Kt^2$ si k est une racine double de l'équation caractéristique.

Dans tous les cas, il faut déterminer la constante K par la même méthode que pour l'ordre 1 : en remplaçant dans (E)