Devoir surveillé n°1

Durée : 2H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Donner un équivalent en $+\infty$ de $x^{\frac{3}{2}} + x\ln(x)$.
2. Donner un équivalent en $+\infty$ de $n! + 3^n + n^{2719}$.
3. Soit $x \in]0,+\infty[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $u_n = \frac{x^n}{n^2}$. Déterminer la limite de (u_n) en fonction des valeurs de x.
4. On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x-z \\ y+z \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Justifier que f est linéaire, calculer son noyau et son image. On attend des bases de ces espaces, ainsi qu'une description géométrique.

Exercice 2 (Quelques questions théoriques)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.
   (a) Donner un condition nécessaire et suffisante sur f et g pour que $\exp(f(x)) \underset{a}{\sim} \exp(g(x))$.
   (b) Donner un exemple de fonctions f, g telles que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ mais $\exp(f(x)) \underset{a}{\not\sim} \exp(g(x))$
2. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites strictement positives telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. On suppose que (u_n) possède une limite ℓ finie ou infinie, avec $\ell \neq 1$. Montrer que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Rappel : on note $f^0 = Id_E$ et $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$ où le symbole f apparaît p fois.
   On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $K_p = \ker(f^p)$ et $I_p = \mathrm{Im}(f^p)$.
   (a) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$ $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
   (b) On suppose, pour un $r \in \mathbb{N}$, que $K_r = K_{r+1}$. Montrer que $I_r = I_{r+1}$.
   (c) Expliquer pourquoi un r comme à la question précédente existe toujours. Quelle est sa valeur maximale ?
   (d) On note, pour le r exhibé aux questions précédentes, $K = K_r$ et $I = I_r$. Montrer que $\forall s \in \mathbb{N}$ $K = K_{r+s}$ et $I = I_{r+s}$.
   (e) Montrer que $K \oplus I = E$.

Exercice 3 (Recherche d'équivalents classiques)

1. Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. D'après le cours de 1ère année, $H_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. On cherche un équivalent de H_n.
   (a) Montrer que $\forall x > -1$ $\ln(1+x) \leqslant x$. Illustrer graphiquement ce résultat (en plus de la preuve).
   (b) En déduire que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
   (c) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$ puis donner un équivalent de H_n.
2. Cette fois on cherche un développement de $\ln(n!)$.
   (a) Montrer (proprement) que $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $\ln(n!) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Montrer que $\int\limits_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$. On donnera une illustration graphique de ce résultat.
   (c) En déduire que, pour $n \geqslant 2$, on a $n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1$.
   (d) Montrer que $(n+1)\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$ puis donner un équivalent de $\ln(n!)$.
   (e) En reprenant le résultat de 2c, montrer que $\ln(n!) = n\ln(n) - n + o_{+\infty}(n)$.

Exercice 4
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ainsi que f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé, ie $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

1. Exprimer, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_2)$ sous forme polynomiale en λ.
2. Vérifier que $A^2 - 4A + 3I_2 = 0$.
3. En déduire que $A \in GL_2(\mathbb{R})$ ainsi que la valeur de A^{-1}.
4. Résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On note λ_1 et λ_2 ses solutions, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
5. Que vaut $(A - \lambda_1 I_2)(A - \lambda_2 I_2)$? En déduire que $A - \lambda_i I_2$ n'est pas inversible pour $i \in \{1, 2\}$.
6. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $F_i = \ker(f - \lambda_i Id_{\mathbb{R}^2}) = \ker(A - \lambda_i I_2)$.
   Justifier, sans donner de base de cet espace, que F_i est une droite.[1]
7. Expliquer pourquoi F_i est l'ensemble des solutions de $AX = \lambda_i X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
   Expliciter des vecteurs u_i tels que $F_i = \mathrm{Vect}(u_i)$. On prendra leurs premières coordonnées égales à 1.
8. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
9. Calculer $D = P^{-1}AP$ ainsi que $\delta = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2)}(f)$. Justifier que $D = \Delta$.
10. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis exprimer A^n en fonction de P, D^n et P^{-1}.
11. Montrer que $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^1 + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour les 5/2 : que sont les λ_i et F_i pour f ?