Equations différentielles

Antoine Louatron

Table des matières

Dans tous le chapitre on notera $\mathbb{K}$ un ensemble qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Equations différentielles linaires du premier ordre

I.1 Equations différentielles

I.1.1 Définition

*Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une **fonction** (dérivable sur un intervalle) et qui fait intervenir à la fois la fonction (notée y le plus souvent) et sa/ses dérivée(s).*

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions qui sont solutions. La variable de la fonction y est souvent notée t ou x.

I.1.2 Exemple

1. L'équation $y' = y^2$ est une équation différentielle.
2. On sait que $\sin'' = -\sin$. Ainsi sin est une solution de $y'' = -y$.
3. Si b est une fonction continue sur une intervalle, $y' = b$ possède une infinité de solutions : les primitives de b.

I.1.3 Exemple

Trouver une solution de l'équation différentielle $y' = 2y$.

Plus généralement, trouver une solution de $y' + ay = 0$ où $a \in \mathbb{C}$ est fixé.

I.2 Résolution de l'équation homogène

I.2.1 Définition

On appelle équation différentielle linaire du premier ordre une équation de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

*avec a, b des fonctions définies sur un intervalle I. L'équation homogène associée à **??** est*

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_H}$$

*On appelle solution de **??** toute **fonction** dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées* courbes intégrales *de l'équation.*

*Le problème consistant trouver une solution de **??** vérifiant en plus une condition du type $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$ et $y_o \in \mathbb{K}$) est appel un problème de Cauchy . On parle de condition initiale.*

I.2.2 Théorème (Résolution de l'équation homogène)

Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I. Pour une fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ les assertions suivantes sont équivalentes

1. **??** $y'(t) + a(t)y(t) = 0$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}\ \forall t \in I\ y(t) = \lambda e^{-A(t)}$.

Ainsi, à chaque scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ correspond exactement une fonction solution y et on remarque que toutes les fonctions solutions sont proportionelles.

Si de plus on donne $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ pour transformer cette équation en problème de Cauchy en lui adjoignant la condition $y(t_0) = y_0$, alors ce problème de Cauchy possède une unique solution.

Preuve.

On commence par prouver l'équivalence de 1 et 2.

Soit y une fonction dérivable sur l'intervalle I.

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \iff e^{A(t)}(y(t) + A'(t)y(t)) = 0 \iff (y(t)e^{A(t)})' = 0$$

Comme I est un intervalle, une fonction y est de dérivée nulle ssi elle est constante.

Soit $y = \lambda e^{-A}$ une solution de l'équation différentielle. Si on impose la condition initiale $y(t_0) = y_0$, on impose $\lambda e^{-A(t_0)} = y_0$ soit encore $\lambda = y_0 e^{A(t_0)}$. La valeur de λ est uniquement déterminée, et donc la solution également. ∎

I.2.3 Exemple

Les solutions de $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{C}$ constante sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{at}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ une constante quelconque.

I.2.4 Remarque

1. La résolution de l'équation homogène se résume en théorie un calcul de primitive. Une telle primitive existe nécessairement d'après le chapitre précédent. Mais ce dernier ne nous dit rien quant à la calculabilité en pratique de cette primitive.
2. Une solution d'équation HOMOGENE est soit tout le temps nulle soit ne s'annule pas.

I.2.5 Exemple

— $I = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$. Les solutions de $y' + y = 0$ sont $x \mapsto \lambda e^{-x}$.

— $I = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les solutions de $y' = \frac{y}{1+x^2}$ sont $x \mapsto \lambda e^{\arctan x}$.
Trouver l'unique solution telle que $y(1) = 1$.

— $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Les solutions de $y' = y \tan x$ sont les $x \mapsto \lambda e^{-\ln \cos x} = \frac{\lambda}{\cos x}$.

I.2.6 M-Remarque

Le fait de raisonner sur un intervalle est TRES important. Les résultats deviennent faux si on travaille sur une réunion d'intervalle par exemple.

I.2.7 Sur les courbes intégrales

Soient y_1 et y_2 des solutions de **??**. Pour $t \in I$ quelconque, si $y_1(t) = y_2(t)$ alors y_1 et y_2 sont solutions d'un même problème de Cauchy et donc sont égales.

Ainsi deux solutions d'une même équationdifférentielle linéaire homogène sont soient égales, soit leur courbes représentatives ne se coupent pas.

I.2.8 Corollaire (Caractérisation de l'exponentielle par une équation différentielle)

Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est la seule fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui vérifie

$$y' = ay \ \textit{ et } y(0) = 1.$$

Preuve.
C'est une application immédiate du théorème **??**. ∎

I.3 Equation avec second membre

On cherche maintenant résoudre l'équation **??**. On supposera toujours $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

I.3.1 Forme des solutions

Si y_p est une solution particulière de **??** et y une autre solution de **??**, alors on remarque que

$$(y - y_p)' + a(x)(y - y_p) = b(x) - b(x) = 0.$$

C'est à dire que $y - y_p$ est solution de l'équation homogène associée. Ainsi, si on trouve UNE solution y_P de **??**, alors on trouvera TOUTE les solutions de **??** en ajoutant cette *solution particulière* une solution générale de l'équation sans second membre. On peut écrire ceci comme

$$y = y_p + y_H$$

où y_H désigne une solution de l'équation homogène.

On a réduit notre problème la recherche d'UNE solution particulière.

I.3.2 Exemple

On considère le problème physique suivant :

sur un générateur de tension, on branche en série une résistance R et une bobine L. Au temps $t = 0$ on ferme le circuit. Qu'elle est l'évolution de l'intensité dans le circuit au cours du temps, sachant qu'au temps 0 elle vaut 0 (par continuité) ?

On sait que dans la bobine, la tension de l'intensité sont liés par la relation $U = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et dans la résistance par $U = RI$. On a donc tout instant :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

On commence par résoudre l'équation homogène associée : $y' + \frac{R}{L}y = 0$, dont les solutions sont $t \mapsto \lambda e^{-\frac{R}{L}t}$. Il reste maintenant à trouver une solution particulière de l'équation de départ. Ici une solution évidente nous saute aux yeux : $y : t \mapsto \frac{E}{R}$. Les solutions de l'équation de départ sont donc

$$y_\lambda : t \mapsto \frac{E}{R} + \lambda e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Il reste maintenant à tenir compte de la condition initiale : on doit avoir $\frac{E}{R} + \lambda = 0$, ainsi l'unique solution du problème est

$$i : t \mapsto \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

I.3.3 Variation de la constante

Pour trouver une solution particulière, on la cherche sous la forme $\lambda(t)e^{-A(t)}$, c'est à dire avec la constante d'intégration qui est devenue une fonction. On exprime alors le fait que cette fonction est solution pour trouver une équation du genre $\lambda' = \dots$ que l'on résout par un calcul de primitive.

Une solution particulière est alors $t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ où λ a été obtenu par un calcul de primitive. Attention, il ne faut pas oublier de multiplier par la solution homogène $e^{-A(t)}$!

I.3.4 Exemple

Résoudre $y' + 2y = xe^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation sans second membre sont $x \mapsto \lambda e^{-2x}$.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)e^{-2x}$. On a alors $y_p' + 2y_p = xe^{-2x}$ ssi $\lambda'(x)e^{-2x} - 2\lambda(x)e^{-2x} + 2\lambda(x)e^{-2x} = xe^{-2x}$

Ainsi y_p est solution ssi $\lambda'(x) = x$. On prend $\lambda : x \mapsto \frac{x^2}{2}$. On a ainsi trouvé une solution particulière : $x \mapsto \frac{x^2}{2}e^{-2x}$.

I.3.5 Théorème

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Etant donné $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution y de l'équation différentielle **??** *qui vérifie $y(x_0) = y_0$.*

Preuve.
On vient de voir que $y_1 = Be^{-A}$ est une solution particulière de l'équation 1 et que $\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_H$. Il reste montrer l'unicité de la réponse au problème de Cauchy considéré.

Soit $y = Be^{-A} + \lambda e^{-A} = (B + \lambda)e^{-A}$ une solution de l'équation différentielle 1.

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 &\Leftrightarrow (B(x_0) + \lambda)e^{-A(x_0)} = y_0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = y_0 e^{A(x_0)} + B(x_0) \end{aligned}$$

Il y a donc un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ convenable, donc une unique solution au problème de Cauchy. ∎

I.3.6 Méthode

Pour résoudre une équation du type $y' + ay = b$:

1. On commence par résoudre l'équation homogène associe : $y' + ay = 0$, ce qui se fait par un premier calcul de primitive.
2. On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre. Soit il y en a une évident, soit via la méthode de variation de la constante. Ceci nécessite un deuxième calcul de primitive.
3. On explicite clairement l'ensemble des solutions demandé (problème de Cauchy, solutions ayant telle ou telle propriété...)

I.3.7 Exemple

Résoudre $(x^2 - 2x - 3)y' + y = (t+1)^{\frac{5}{4}}$ et $y(4) = 5^{\frac{1}{4}}$ sur l'intervalle $]3, +\infty[$.

I.4 Réduire le problème de la recherche de y_P

C'est un principe simple qui permet parfois de se ramener la résolution d'équations plus simples.

I.4.1 Proposition (Principe de superposition)

Soient $a, b_1, b_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifient $y_1' + ay_1 = b_1$ et $y_2' + ay_2 = b_2$. Alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1 + b_2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λy_1 est solution de $y' + ay = \lambda b_1$.

Preuve.
Il suffit de vérifier. Nous verrons plus tard que ces faits sont une traduction directe de la “linéarité” de l'équation considérée. ∎

I.4.2 En pratique

On peut utiliser cette proposition pour "couper" une équation en deux et résoudre deux équations plus simples. On écrit le second membre sous la forme $b_1 + b_2$ et on trouve deux solutions particulières plus simples.

I.4.3 Exercice

Montrer que $x \mapsto \frac{e^x}{2}$ et $x \mapsto xe^{-x}$ sont solutions particulières respectives de $y' + y = e^x$ et $y' + y = e^{-x}$. En déduire les solutions de $y' + y = 2\,\mathrm{sh}\,x$.

I.4.4 Passer par les complexes

Soit $a \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles. Remarquons que si $y = u + iv$ est une fonction à valeurs complexes dérivable (sous forme algébrique) alors $y' + ay = (u + au') + i(v + iv')$ et on peut donc calculer des solutions complexes à une équation à coefficent réel puis ne considérer que la partie réelle ou imaginaire comme solution réelle.

Ainsi pour résoudre $y' + y = \cos x$ on résout $y' + y = e^{ix}$ puis on calcule la partie réelle des solutions trouvées.

I.4.5 Exercice

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $y' + 2y = 2xe^x + \sin x$ et $y(0) = 0$.

II Equations différentielles linéaires du second ordre

La situation se complique singulièrement dès qu'on admet les dérivées seconde. Nous allons donc restreindre fortement notre cadre d'étude. Nous allons considérer les équations différentielles linaires du second ordre de la forme

$$y'' + ay' + b = d$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. On pose

$$y'' + ay' + b = f(t) \qquad (E)$$

$$y'' + ay' + b = 0 \qquad (E_H)$$

?? est l'*équation homogène associée.* On cherche les fonctions y deux fois dérivables qui vérifient cette relation. On notera $\mathcal{D}^2(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et dont la dérivée est dérivable. Les problèmes de Cauchy pour ce genre d'équation sont de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + ay' + by &=& f(t) \\ y(t_0) &=& y_0 \\ y'(t_0) &=& y_0' \end{array}\right.$$

II.1 Résolution de l'équation homogène

On commence par chercher les fonctions de la forme $t \mapsto e^{\alpha t}$ qui sont solutions de **??**.

II.1.1 Proposition

Soit $r \in \mathbb{K}$. La fonction

$$y : \left\{\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & e^{rt} \end{array}\right.$$

est solution de **??** *ssi r vérifie $r^2 + ar + b = 0$.*

Preuve.

Soit $r \in \mathbb{R}$. On a alors pour $t \in I$,

$$\begin{aligned} y'' + ay' + b = 0 &\Leftrightarrow r^2e^{rt} + abre^{rt} + be^{rt} = 0 \\ &\Leftrightarrow (r^2 + ar + b)e^{rt} = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0. \end{aligned}$$

II.1.2 Définition

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est l'équation caractéristique de **??**.

II.1.3 Remarque

On voit tout de suite que la résolution de l'équation du second ordre va dépendre de la valeur de $\mathbb{K}$ cette fois, vu qu'il y aura des cas cas où l'équation caractéristique n'aura pas de racine réelle.

II.1.4 Théorème (Résolution de l'équation homogène du second ordre, cas complexe)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. *Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est solution de* **??** *ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que*

$$y : \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right.$$

2. *Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est solution de* **??** *ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que*

$$y : \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{array} \right.$$

Si de plus on se donne $t_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{C}$, alors il existe une unique solution y de l'équation différentielle homogène qui vérifie $y(t_0) = y_0$ ET $y'(t_0) = y_0'$.

Preuve.
Les fonctions proposées sont solutions d'après la proposition précédente et la linéarité de l'équation. Il reste donc prouver que toute solution $y \in \mathcal{D}^2(I,\mathbb{K})$ de cette équation est de la forme proposée.

Soit donc $y \in \mathcal{D}^2(I,\mathbb{K})$ une solution de **??**. On note r_1, r_2 les racines de l'équation caractéristique (éventuellement confondues). On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{-r_1 t} y(t) \end{array} \right.$$

On a alors pour $t \in I$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{r_1 t} f(t) \\ y'(t) &= e^{r_1 t}(r_1 f(t) + f'(t)) \\ y''(t) &= e^{r_1 t}(r_1^2 f(t) + 2r_1 f'(t) + f''(t)) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + ay' + by \\ &= e^{r_1 t}(f''(t) + (2r_1 + a) f'(t) + (r_1^2 + ar_1 + b) f(t)) \\ &= f''(t) + (2r_1 + a) f'(t) \end{aligned}$$

car r_1 est racine de l'équation caractéristique. de plus on remarque que

$$2r_1 + b = (2r_1 + (-r_1 - r_2)) = (r_1 - r2).$$

Ainsi f' est solution de l'équation différentielle $z' + (r_1 - r_2)z = 0$. On en déduit que $f' = \lambda_1 e^{(r_2 - r_1)t}$ pour un $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. On distingue maintenant deux cas pour calculer une primitive de f'.

1. si $r_1 \neq r2$, alors $f : t \mapsto \frac{\lambda_1}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)t} + \lambda_2$ pour un $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ et donc

$$y : t \mapsto e^{r_1 t} f(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}.$$

2. Si $r_1 = r_2$, alors $f' = \lambda_1$ donc $f : t \mapsto \lambda_1 t + \lambda_2$ et ainsi

$$y : t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{r_1 t}.$$

La donnée d'un problème de Cauchy fournit en plus un système de deux équations à deux inconnues (λ_1 et λ_2) que l'on résout facilement et de manière unique (on le montrera plus tard). ∎

II.1.5 Théorème (Résolution d'équations réelles)
Cette fois $a, b \in \mathbb{R}$.

1. *Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{R}$, alors les solutions à valeurs réelles de* **??** *sont les fonctions*

$$y : \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right.$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2. *Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors les solutions à valeurs réelles de* **??** *sont les fonctions*

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{rt} \end{array} \right.$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

3. *Si l'équation possède deux solutions non réelles, qui sont donc complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions de à valeurs réelles* **??** *sont les fonctions*

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{array} \right.$$

Preuve.
On s'intéresse maintenant au dernier cas : l'équation caractéristique n'a pas de racine réelle. D'après le théorème précédent, les solutions complexes de l'équation différentielles sont les fonctions $t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} + \lambda_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t}$. On cherche parmi ces solutions lesquelles sont réelles. Soit y une de ces solutions complexes. Soient de plus $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 \not\equiv t_2 \mod \pi$ (c'est possible si I n'est pas réduit un point).

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y(t_1) & \in & \mathbb{R} \\ y(t_2) & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y(t_1) & = & \overline{y(t_1)} \\ y(t_2) & = & \overline{y(t_2)} \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 e^{\alpha t_1} e^{i\beta t_1} + \lambda_2 e^{\alpha t_1} e^{-i\beta t_1} & = & \overline{\lambda_1} e^{\alpha t_1} e^{-i\beta t_1} + \overline{\lambda_2} e^{\alpha t_1} e^{i\beta t_1} \\ \lambda_1 e^{\alpha t_2} e^{i\beta t_2} + \lambda_2 e^{\alpha t_2} e^{-i\beta t_2} & = & \overline{\lambda_1} e^{\alpha t_2} e^{-i\beta t_2} + \overline{\lambda_2} e^{\alpha t_2} e^{i\beta t_2} \end{array} \right.$$

On multiplie les deux lignes de ce système par $e^{-\alpha t_1} e^{i\beta t_1}$ et $e^{-\alpha t_2} e^{i\beta t_2}$ respectivement

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y(t_1) & \in & \mathbb{R} \\ y(t_2) & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 e^{2i\beta t_1} + \lambda_2 & = & \overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2} e^{2i\beta t_1} \\ \lambda_1 e^{2i\beta t_2} + \lambda_2 & = & \overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2} e^{i\beta t_2} \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 (e^{2i\beta t_1} - e^{2i\beta t_2}) & = & \overline{\lambda_2}(e^{2i\beta t_1} - e^{2i\beta t_2}) \\ \lambda_1 e^{2i\beta t_2} + \lambda_2 & = & \overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2} e^{i\beta t_2} \end{array} \right.$$

Or on a supposé que $e^{2i\beta t_1} \neq e^{2i\beta t_2}$ et donc on obtient y à valeurs réelles ssi $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$. Si on note $\lambda_1 = u + iv$ (et donc $\lambda_2 = u - iv$) on obtient comme forme générale, pour $t \in I$

$$y(t) = e^{\alpha t}((u + iv)e^{i\beta t} + (u - iv)e^{-i\beta t}) = e^{\alpha t}(2u \cos \beta t + 2v \sin \beta t).$$

C'est bien la forme annoncée. ■

II.1.6 Exercice

1. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}$.*
2. *Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $y'' + iy' - (i+1)y = 0$.*

II.1.7 Exemple

Etude de la décharge d'un condensateur dans un circuit RLC série.

II.1.8 Remarque

Si on est dans le cas 3 du théorème précédent, on note y une solution. y est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda_1 \cos \beta x + \lambda_2 \sin \beta x)$$

avec $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ y(x) = e^{\alpha x}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \cos(\beta x + \varphi) = e^{\alpha x}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \sin(\beta x + \psi).$$

Il suffit en effet de remarquer que si on pose

$$a = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \text{ et } b = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$$

alors on a $a^2 + b^2 = 1$.

Donc on peut poser $a = \cos \varphi$ et $b = -\sin \varphi$ pour un $\varphi \in \mathbb{R}$. Mais alors

$$\lambda_1 \cos \beta x + \lambda_2 \sin \beta x = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}(a \cos \beta x - b \sin \beta x) = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \cos(\beta x + \varphi)$$

Si on avait posé plutôt $a = \cos \psi$ et $b = \sin \psi$, on aurait trouvé $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \sin(\beta x + \varphi)$.

II.2 Résolution de l'équation avec second membre

II.2.1 Forme des solutions

Soient y_1 et y_2 deux solutions de **??**. Alors $y_1 - y_2$ est solution de **??** :

$$a(y_1 - y_2)'' + b(y_1 - y_2)' + c(y_1 - y_2) = d - d = 0.$$

Ainsi si on dispose d'une solution particulière y_1 de l'équation avec second membre on a

$$\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_0$$

en notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de **??** et $\mathcal{S}_0$ celui des solutions de **??**.

On dit souvent que la solution générale de l'équation avec second membre est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

II.2.2 Théorème

1. *Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et soit $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Alors l'équation différentielle linaire*

$$ay'' + by' + cy = d$$

admet au moine une solution y_1, et l'ensemble de ses solutions est $y_1 + \mathcal{S}_0$ où $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée

2. *Soient $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{rcl} ay'' + by' + cy & = & d \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_0' \end{array}\right.$$

admet une unique solution.

Preuve.
Admis! ∎

II.2.3 Proposition (Principe de superposition)
Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifient $y_1''+ay_1'+by_1 = f_1$ et $y_2''+ay_2'+by = f_2$. Alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + cb = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

Preuve.
Faire la vérification! il s'agit d'une écriture plus générale que celle présentée pour les équation d'ordre 1, mais l'interprétation est la même. ∎

II.2.4 Méthode

La méthode de résolution pour une équation du deuxième ordre est la même que pour une équation du premier ordre

1. Résoudre l'équation homogène associe.
2. Trouver une solution particulière (point qui peut être plus délicat).
3. Répondre au problème posé, sachant que la solution générale de l'équation avec second membre.....

II.2.5 Méthode

Le second membre est de la forme $Ae^{\alpha t}$ avec $A, \alpha \in \mathbb{C}$ des constantes. On cherche y_p sous la forme $P(t)e^{\alpha t}$ où P est :

1. K une constante si α n'est pas solution de l 'équation caractéristique.
2. $t \mapsto Kt$ si α est une racine de l'équation caractéristique (ie $e^{\alpha t}$ est l'une des solution de l'équation homogène)
3. $t \mapsto Kt^2$ si α est une racine double de l'équation caractéristique.

Dans tous les cas, il faut déterminer la constante K

II.2.6 Exemple

Donner les solutions de l'équation homogène et la forme sous laquelle chercher une solution particulière pour les équations suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$.
2. $y'' + y' + y = e^{-x}$.
3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.
4. $y'' + y = \cos x$.

II.2.7 M-Remarque

On peut donc étendre la méthode précédente aux second membres de la forme $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$ en considérant respectivement les parties imaginaires et réelles de $e^{i\omega t}$.

II.2.8 Exemple

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2\operatorname{sh}(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Index général

Index des symboles