I Forme algébrique et exponentielle

Exercice 1
Calculer le module et l'argument principal de :

1. $i + e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. $-\sin\theta + i\cos\theta$.
3. $(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^{1515}$.
4. $\frac{(1+i\tan\alpha)^2}{1+\tan^2\alpha}$ *où* $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 2
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ *le complexe* $(1+i)^n$ *est-il réel positif ?*

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

1. $(3i-7)z + 1 = i(3-z)$
2. $\overline{z} = z^7$
3. $\begin{cases} iz_1 & +(2+i)z_2 & = 3+8i \\ 2z_1 & -4iz_2 & = 10-10i \end{cases}$

Interprétation géométrique

Exercice 4
Résoudre $|z| = |z-1| = \left|\frac{1}{z}\right|$.

Exercice 5
On considère la fonction $f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

1. *A quelle condition sur* z *a-t-on* $f(z) \in \mathbb{R}$ *?* $f(z) \in i\mathbb{R}$ *?* $|f(z)| = 1$ *?*
2. *Prouver que* f *est une bijection dans un ensemble à préciser, en trouvant sa réciproque.*
3. *En utilisant* f^{-1}, *calculer* $f(\mathbb{R}), f(i\mathbb{R}\backslash\{-i\}), f(\mathcal{C}\backslash\{-i\})$ *où* $\mathcal{C}$ *est le cercle unité.*

Exercice 6
Soient $u, v \in \mathbb{C}$ *de module 1. Sans utiliser la forme algébrique, répondre aux questions :*

1. *Pour* $x, \in \mathbb{R}$, *montrer que* $|x-u| = |1-ux|$. *Interprétation géométrique ?*
2. *Montrer que* $\frac{u+v}{1+uv}$ *est réel quand il existe. A quelle condition a-t-on* $uv = -1$ *?*

II Somme, produit

Exercice 7
Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$ *:*

1. $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx+y)$.
2. $\sum_{k=0}^{n} e^{x+iky}$
3. $\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega$.

III Racines n-ièmes

Exercice 8
Simplifier $j(j+1), \frac{j}{j^2+1}, \frac{j+1}{j-1}$ *où* $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{C}$ *:*

1. $z^6 + 27 = 0$
2. $z^6 - 2z^3\cos(\varphi) + 1 = 0$ *(*$\varphi \in \mathbb{R}$*)*
3. $z^8 + z^4 + 1 = 0$
4. $(z-2)^5 = z^5$
5. $(z-1)^n = (z+1)^n$

IV Degré 2

Exercice 10
Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^3 + (1+3i)z^2 + (3i-2)z - 2 = 0$. *on pourra commencer par factoriser par* $(z-\alpha)$ *où* α *est un complexe bien choisi.*

Exercice 11
Résoudre les systèmes suivant d'inconnues $x, y \in \mathbb{C}$ *:*

1. $\left\{ \begin{aligned} x+y &= 2 \\ xy &= 2 \end{aligned} \right.$

2. $\left\{ \begin{aligned} x+y &= 1+i \\ xy &= 13i \end{aligned} \right.$