

Table des matières

I Opérations	1
I.1 Produit, puissances	1
I.2 Inversibilité	2
II Trace	2
II.1 Trace d'une matrice	2
II.2 Trace d'un endomorphisme	3
III Déterminant	3
III.1 Déterminant de taille n	3
III.2 Propriétés calculatoires	4
III.3 Déterminant et espace vectoriel	6
Dans ce chapitre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , n un entier naturel non nul.	

I.1.5 Exemple

Calculer toutes les puissances de $A =$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

I.1.6 Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors

$$A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k} = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

I Opérations

I.1 Produit, puissances

I.1.1 Notation

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée on note $A^0 = I_n$ et $A^p = A \times \dots \times A$ (p fois).

I.1.2 Exemple

Factoriser $A^2 + A - 2I_n$

I.1.3 Exemple

On suppose qu'une matrice carrée A vérifie $A^2 + A - 2I_n = 0$. Calculer le reste de la division euclidienne de X^k par $X^2 + X - 2$ pour $k \in \mathbb{N}$ et en déduire une expression de A^k .

I.1.4 Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} A^k B^{n-k}$$

Exercice 1

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'ordre $r > 0$, c'est à dire que $A^r = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.

exo : donner un exemple d'une telle matrice.

I.1.7 Rappels sur les matrices particulières

Un produit ou une somme de matrices triangulaire (ou diagonale) reste triangulaire.

Si $D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, alors $D^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix}$ pour

tout $k \in \mathbb{N}$ (avec la convention $0^0 = 1$).

I.1.8 Produit et transposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$. En particulier, $\forall k \in \mathbb{N} \quad {}^t(A^k) = ({}^tA)^k$.

I.1.9 Lignes et colonnes

Soit L une matrice ligne de taille n et C une matrice ligne de taille n . Donner les tailles et le rang des matrices CL et LC .

I.2 Inversibilité

I.2.1 Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n = BA.$$

Dans ce cas on note $B = A^{-1}$ et pas $\frac{1}{A}$. En particulier on ne notera pas de quotients de matrices, mais des produits par l'inverse.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n inversibles. Ce n'est pas un espace vectoriel !

I.2.2 Proposition

On dit que $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour \times :

1. $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$
2. Le produit de deux matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ inversibles est encore inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

I.2.3 Lien avec la transposition

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ donc la relation I.1.8 est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

I.2.4 Inverse particulière

Une matrice triangulaire A est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. A^{-1} est triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A .

En particulier, la relation I.1.7 est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$ dès que les a_n sont tous non nuls.

I.2.5 Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons C_1, \dots, C_n les colonnes de A et L_1, \dots, L_n ses lignes.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff A \underset{L}{\sim} I_n \text{ (équivalente par ligne)} \iff A \underset{C}{\sim} I_n \\ &\iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base de } M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff (L_1, \dots, L_n) \text{ est une base de } M_{1,n}(\mathbb{K}) \\ &\iff \operatorname{rg}(A) = n \iff \ker(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ &\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n \exists ! X \in \mathbb{K}^n \ AX = Y \\ &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ AB = I_n \end{aligned}$$

I.2.6 Cas $n = 2$ ou 3

On a en plus $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$.

II Trace

II.1 Trace d'une matrice

II.1.1 Définition

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle la trace de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ le **nombre** $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$ qui est la somme de ses coefficients diagonaux.

II.1.2 Exemple

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\operatorname{tr}({}^tAA)$.

II.1.3 Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\operatorname{tr}({}^tA) = \operatorname{tr}(A)$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B)$.

Ainsi la trace est une forme linéaire : $\operatorname{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

Exercice 2

Montrer que le noyau de la trace est un hyperplan et en donner une base.

II.1.4 Effet du produit

Montrer que dans le cas général on a pas $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(A)^2$.

II.2 Trace d'un endomorphisme

II.2.1 Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Preuve.

Notons $C = AB$ et $D = BA$ avec $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ et $C = (c_{i,j}), D = (d_{i,j})$.

Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$ on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ et donc $\text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} =$

$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k}$ en échangeant les sommes.

On renomme maintenant les indices : $\text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i} = \sum_{i=1}^n d_{i,i} = \text{tr}(D)$ ■

Exercice 3

Montrer que $\text{tr}({}^tAB) = \text{tr}(A{}^tB)$ avec les notations du théorème.

En déduire la valeur de cette trace dans le cas où A est symétrique et B anti-symétrique.

II.2.2 Matrices semblables

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

En effet, si on a $A = P^{-1}BP$ pour une matrice inversible P (voir P comme une matrice de passage), alors $\text{tr}(A) = \text{tr}((P^{-1}B)P) = \text{tr}(P(P^{-1}B)) = \text{tr}(B)$.

II.2.3 Invariants

On peut maintenant dire que deux matrices semblables ont :

1. le même rang
2. la même trace

II.2.4 Définition-Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} de E choisie pour calculer la matrice. On le note $\text{tr}(f)$.

II.2.5 Exemple

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto XP' \end{cases}$. Calculer $\text{tr}(f)$.

Exercice 4

Soit p un projecteur dans E de dimension finie. Montrer que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

II.2.6 Linéarité

Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a $\text{tr}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{tr}(f) + \beta \text{tr}(g)$.

III Déterminant

III.1 Déterminant de taille n

III.1.1 Définition-Proposition

Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

1. $\det(I_n) = 1$
2. \det est linéaire par rapport à chaque colonne.
3. \det est anti-symétrique ie change de signe si on échange deux colonne de sa variable.

III.1.2 Conséquences de la définition

Notons C_1, \dots, C_n les colonnes de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si on a $C_i = 0$ pour un certain i alors $\det(A) = 0$ par linéarité par rapport à la i ème colonne.
- Si on a $C_i = C_j$ pour $i \neq j$ alors $\det(A) = -\det(A)$ par échange de ces deux colonnes donc $\det(A) = 0$.

III.1.3 Exemple

Calculer $\begin{vmatrix} 7 & -42 \\ -3 & 18 \end{vmatrix}$

III.1.4 Interprétation géométrique

En dimension 2 : aire (algébrique) d'un parallélogramme + dessin. En dimension 3 : volume d'un parallélépipède.

III.1.5 Notation

Comme en dimension 2 et 3, on note un déterminant sous forme d'un tableau de nombre entouré de barres verticales.

III.1.6 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait subir une opération élémentaire sur les colonnes de A et on note A' la matrice obtenue.

1. Si l'opération est $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si l'opération est $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\det(A') = \lambda \det(A)$
3. Si l'opération est $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ alors $\det(A') = \det(A)$.

III.1.7 Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

III.1.8 Calcul en pratique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On réduit A par colonnes pour calculer son déterminant. Attention aux opérations d'échange ou de multiplication par un scalaire.

III.1.9 Exemple

$$\text{Calculer } \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

III.1.10 Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Preuve.

En reprenant les notations de III.1.6, on remarque que $\det(A) = 0 \iff \det(A') = 0$
Réduisons la matrice par colonne et notons R la matrice réduite. On a $\det(R) = 0 \iff \det(A) = 0$.

$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff R = I_n$. Ainsi si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $\det(A) \neq 0$ car $\det(I_n) = 1 \neq 0$.

Supposons au contraire que $A \notin GL_n(\mathbb{K})$. Alors R possède au moins une colonne nulle (autant que la dimension du noyau de A d'ailleurs) et $\det(R) = 0$ donc $\det(A) = 0$. ■

III.1.11 Exemple

Trouver à quelle condition sur $a \in \mathbb{C}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ -1 & a^2 & a \end{pmatrix}$ est inversible

III.1.12 Remarque

Le déterminant est toujours une expression polynomiale des coordonnées (s'exprime comme produits et sommes des coordonnées de la matrice)

III.1.13 Exemple

Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

III.1.14 Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Preuve.

Remarquer que le déterminant est nul ssi un des coefficient diagonaux est nul ssi la matrice triangulaire n'est pas inversible.

Dans ce cas d'une matrice inversible, le calcul est direct, sur le même modèle que l'exemple. ■

III.1.15 Méthode

Une première méthode de calcul du déterminant :

1. Echelonner la matrice par opérations élémentaires (attention à la valeur du déterminant qui change parfois)
2. Calculer le produit des coefficients diagonaux.

III.2 Propriétés calculatoires

III.2.1 Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det({}^tA)$.

Preuve.

Admis! Elle est plutôt difficile. ■

III.2.2 Conséquences

On peut maintenant effectuer des opérations élémentaires sur les lignes au même titre que sur les colonnes, avec les mêmes effets.

III.2.3 Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$, $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de A en supprimant la i ème ligne et la j ème colonne.

1. $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la j ème colonne)
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la i ème ligne)

Preuve.

Admis. Une idée de preuve (un peu pénible, mais pas si difficile) : on reprend les notations de III.1.6 et on prouve le premier point pour j fixé. On prouve alors que l'application de la formule à A' est l'opposé de celle à A pour un échange de colonne et donne le même résultat pour une combinaison de colonnes. Ainsi la formule est vraie pour A' ssi elle l'est pour A . Il suffit ensuite de réduire A et de remarquer que la formule est triviale pour l'identité. ■

III.2.4 Tableau des signes

On résume souvent les signes qui apparaissent dans cette formule par

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

III.2.5 Exemple

Calculer le déterminant $d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ On effectue $C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1$ et on

développe par rapport à la 3ème colonne : $d = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (3 \times 1 - 2 \times (-5)) = 13$.

III.2.6 Méthode

Une deuxième méthode de calcul du déterminant : Appliquer bêtement une des formules précédente.

Une bonne idée sera de faire apparaître des 0 sur une ligne ou colonne pour réduire le nombre de termes dans le développement.

III.2.7 Exemple

Calculer le déterminant $d_n = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & -3 & 2 \\ 0 & & \dots & & 1 & -3 \end{vmatrix}_{[n]}$

III.2.8 Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Preuve.

Immédiat par récurrence et utilisant les propriétés calculatoires de la conjugaison (somme, produit). ■

III.2.9 Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Preuve.

Si A n'est pas inversible, AB non plus et donc le résultat est vrai.

Sinon, considérons $f \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{K} \\ (C_1, \dots, C_n) & \mapsto \frac{\det(AC_1, \dots, AC_n)}{\det(A)} \end{cases}$.

Alors $f(I_n) = 1$, si on échange deux colonnes de M , f change de signe. De plus, f est linéaire par rapport à chaque colonne par composition et produit par une constante ($X \mapsto AX \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et le déterminant est linéaire par rapport à cette colonne).

Ainsi $f = \det$. TADAM! ■

III.2.10 M-Attention

On a surtout pas $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

III.2.11 Corollaire

Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Preuve.

On a directement $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$...

III.3 Déterminant et espace vectoriel

III.3.1 Définition

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs. Soit \mathcal{B} une base. On appelle déterminant de \mathcal{F} dans la base \mathcal{B} le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n))$.

III.3.2 Lien avec la géométrie

Ce que l'on appelait déterminant d'une famille dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 est en fait le déterminant dans la base canonique. Rappel : dans \mathbb{R}^2 , $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ssi \vec{u}, \vec{v} sont colinéaires.

III.3.3 Proposition

Soit \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une famille de n vecteurs.

\mathcal{B}' est une base de E ssi $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$

III.3.4 Exercice

Que vaut $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}$ dans ce cas ?

III.3.5 Exemple

Montrer que $((\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

III.3.6 Théorème

Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Preuve.

Posons $A = P^{-1}BP$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

On a alors $\det(A) = \det(P^{-1})\det(B)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(P)\det(B) = \det(B)$. ■

III.3.7 Invariants

Nous voilà avec 3 invariants de changement de base pour les endomorphismes : le rang, la trace et le déterminant.

III.3.8 Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un \mathbb{K} -ev de dimension n . Toutes les matrices de f (ie dans n'importe quelle base) ont le même déterminant, on le note $\det(f)$ et on l'appelle déterminant de f .

III.3.9 Exemple

On considère l'application $T : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{cases}$. Calculer son déterminant.

III.3.10 Exemple

On considère des espaces supplémentaires $E = F \oplus G$ avec $F, G \neq \{0_E\}$ (ce qui impose $\dim(E) > 1$). Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction G . Calculer $\det(s)$. De même avec p le projecteur sur F parallèlement à G .

III.3.11 Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n .

1. $\det(\text{Id}_E) = 1$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$
4. f est bijective (on dit aussi inversible) ssi $\det(f) \neq 0$ et alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

III.3.12 Puissances

ON a directement $\det(f^n) = \det(f)^n$ qui est valable par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ et même $n \in \mathbb{Z}$ si f est bijective.