Devoir maison n°2

A rendre le 19/10

Exercice 1
En vue : quelques révisions sur les polynômes ainsi que la solution au fameux problème de Bâle.

Dans tout l'exercice, sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

Partie I, retour en PTSI

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

1. Rappeler l'expression de $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. En déduire l'expression de $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$

Partie II, polynômes de Tchebychev

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}.$$

On commence par étudier quelques propriétés simples de ces polynômes.

1. Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.
2. Calculer le degré de T_n et son coefficient dominant que l'on notera $c(T_n)$.
3. Etudier la parité de la fonction polynomiale associée à T_n en fonction de la parité de n.
4. On note, pour cette question, m le degré de T_n et on suppose $n \geqslant 1$. Déduire le coefficient de X^{m-1} dans T_n.
5. Calculer $T_n(1), T_n(-1)$ et $T_n(0)$ en fonction de n.

Partie III, révisions sur les polynômes

On va chercher les racines de ces polynômes.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n vérifie

$$\forall\theta \in \mathbb{R}\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

2. Supposons que Q_n soit un polynôme tel que $\forall\theta \in \mathbb{R}\ Q_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Montrer que $Q_n = T_n$.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que l'entier n est non nul.
   (a) A quelle condition sur $\theta \in \mathbb{R}$ a-t-on $T_n(\cos\theta) = 0$?
   (b) Montrer (proprement) que les nombres de la forme $\lambda_p = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{p\pi}{n}\right)$ avec $p \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts.
   (c) Montrer que T_n possède n racines distinctes dans $[-1, 1]$
4. Que peut-on dire du polynôme T_n au vu de la question précédente ? Donner sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie IV, sur les épaules des géants.

On cherche ici la valeur de la somme d'un série notoirement convergente, $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$. Notons $\ell = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. On désignera par S_n la n-ième somme partielle de cette série, ie. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Exprimer pour tout n, le nombre S_{2n} en fonction de S_n et I_n uniquement.
2. En déduire que $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{2k+1}$ converge vers $\ell' = \frac{3}{4}\ell$.
3. On fixe $n > 0$ et on prend x dans un intervalle où $T_n(x) > 0$. Rappelons que l'on a noté $\lambda_p = \cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2n}\right)$ pour $p \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que $\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - \lambda_k}$.

4. Montrer que $T_n'(1) = n^2$. On pourra dériver la relation $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
5. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2n}\right)}$. Indication : on doit trouver n^2...
6. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ et pour θ convenable (à préciser), $\frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1$.
7. En déduire les valeurs de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2p+1)\pi}{4n}\right)}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2p+1)\pi}{4n}\right)}$
8. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.

   (b) En déduire un encadrement de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{(2p+1)\pi}{4n}\right)^2}$ puis que

$$\frac{\pi^2(n^2-1)}{8n^2} \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi^2}{8}$$

   (c) Calculer ℓ' et montrer que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.