

Table des matières

I Etendre le cadre	1
I.1 Ensembles dénombrables	1
I.2 Espaces probabilisés	2
II Calcul de probabilités	3
II.1 Propriétés des probabilités	3
II.2 Probabilités conditionnelles	4
II.3 Evénements indépendants	5
III Variables aléatoires	5
III.1 Lois	5
III.2 Loi usuelles	6
III.3 Variables indépendantes	6
III.4 Espérance, variance	8

I Etendre le cadre

I.1 Ensembles dénombrables

I.1.1 Définition

Soit E . On dit que E est dénombrable ssi il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$ bijective. En d'autres termes, on peut écrire $E = \{x_0, x_1, \dots\}$ sans oublier un seul élément.

I.1.2 Fini ou dénombrable

Les ensembles finis ou dénombrables sont exactement les ensembles pour lesquels on peut numéroter les éléments, ou encore les décrire sous la forme $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (quitte à prendre une infinité de fois la même valeur pour x_n dans le cas des ensembles finis).

I.1.3 Théorème

1. $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est dénombrable.
2. \mathbb{Z} est dénombrable.
3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont dénombrables.
4. Si E et F sont dénombrables alors $E \times F$ est dénombrable.

Preuve.

1. Encore heureux !
2. Exhibons une bijection de \mathbb{Z} dans \mathbb{N} . On pose

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{N} \\ k & \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ 2 \times (-n) + 1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{cases} .$$

φ est une bijection. Pour le prouver on peut soit examiner l'injectivité et la surjectivité, soit exhiber sa réciproque.

- 3.
4. Notons $E = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $F = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. L'idée ici et d'énumérer tous les éléments de $E \times F$ "par diagonale" : on représente E sur l'axe des abscisses, F sur l'axe des ordonnées (un élément de chaque sur chaque entier, e_0, f_0 situés en 0).

On énumère les éléments de $E \times F$ de la manière suivante : pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on part de (e_k, f_0) (graphiquement sur l'axe des abscisses), puis on considère $(e_{k-1}, f_1), (e_{k-2}, f_2) \dots (e_0, f_k)$.

Plus précisément, si $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on note $k = i + j$ et alors on a déjà rempli k diagonales dont numéroté $\sum_{p=1}^k p = \frac{k(k+1)}{2}$ éléments, et (e_i, f_j) est l'élément numéro $\frac{k(k+1)}{2} + j$ (on vient de créer la bijection...) ■

I.1.4 Remarque

On doit pouvoir prouver que tout ensemble inclus dans un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable. Ainsi \mathbb{Q} doit être dénombrable, mais ce n'est pas au programme.

I.1.5 Coin culture

\mathbb{R} n'est pas dénombrable, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ non plus. Il semble alors évident que $\mathbb{C}, \mathbb{R}^I, \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ ne sont pas dénombrables (pour le dernier, considérer le sous ensemble des fonctions constantes...).

I.1.6 Objectif

On souhaite étendre la notion de variable aléatoire à ces variables à valeurs dans un ensemble dénombrable (le cas fini est traité en 1ère année). Un des buts est de pouvoir modéliser le genre de situation suivante :

On joue à pile ou face jusqu'à ce que la pièce tombe sur pile. Quel est le nombre moyen de coup ? Le problème pour l'instant est qu'on ne peut pas borner à priori le nombre de coups à jouer et donc la variable aléatoire dont la valeur est ce nombre de coup est a priori à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

I.2 Espaces probabilisés

I.2.1 Notation

Si les A_i sont des ensembles pour $i \in \mathbb{N}$, on note $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{x \mid \exists i \in \mathbb{N} x \in A_i\}$ la réunion de ces ensembles et $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{x \mid \forall i \in \mathbb{N} x \in A_i\}$ leur intersection.

I.2.2 Définition

Soit Ω un ensemble que l'on appellera univers. Une **tribu** sur Ω est un sous ensemble T de $\mathcal{P}(\Omega)$ (les éléments de T sont des sous ensembles de Ω) qui vérifie les 3 conditions :

1. $\Omega \in T$
2. $\forall A \in T A^C = \bar{A} = \Omega \setminus A \in T$.
3. Si $(A_n) \in T^{\mathbb{N}}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$.

Les éléments de T (qui sont des ensembles, rappelons le) sont des **événements**. Le couple (Ω, T) est un **espace probabilisable**.

I.2.3 En pratique

Ω représente l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire et un événement un ensemble de résultat possibles. Pour reprendre notre jeu de pile ou face, on peut prendre $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et un événement peut être "le jeu s'arrête en un nombre pair de coup" qui est l'ensemble $\{2n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Bien souvent, Ω n'est pas précisé et sa connaissance n'est pas indispensable au bon déroulé de l'exercice. On supposera dans ce cas qu'une bonne tribu est choisie.

I.2.4 Proposition

Soit (Ω, T) un espace probabilisable.

1. $\emptyset \in T$.
2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$. De plus, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c}$

Preuve.

Exo ! ■

I.2.5 Définition

Soit Ω un ensemble et T une tribu sur Ω . Une **probabilité** sur Ω est une fonction \mathbb{P} qui associe à chaque événement A une probabilité $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ avec les contraintes suivantes :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements incompatibles deux à deux (ie disjoints deux à deux), alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \text{ propriété de } \sigma\text{-additivité}$$

En particulier, toute la série précédente doit converger vers un nombre dans $[0, 1]$.

Le triplet (Ω, T, \mathbb{P}) est appelé un **espace probabilisé**. Dans la suite du cours, nous utiliserons ces notations.

I.2.6 Cas fini

Si on considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements telle que $A_n = \emptyset$ pour tout $n \geq 2$, on retrouve la définition de 1ère année. Avec un nombre fini de A_n non vide, il s'agit d'une propriété démontrée en 1ère année.

I.2.7 Mais pourquoi des tribus ?

Dans le cas où Ω est fini ou dénombrable, on pourra prendre $T = \mathcal{P}(\Omega)$ sans problème. Les choses se corsent singulièrement si on prend Ω non dénombrable.

Par exemple, on prouve (un "on" qui est bien en dehors du cadre de ce cours), qu'on ne peut pas poser $\Omega = [0, 1], T = \mathcal{P}(\Omega)$ et la probabilité uniforme naturelle qui vérifie $\mathbb{P}([a, b]) = b - a$.

I.2.8 Définition

Avec les notations précédentes :

on dit que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements ssi $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (disjoints 2 à 2) et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$.

I.2.9 Exemple

Reprenons l'exemple du jeu de pile ou face. On pose A_n l'événement : le jeu s'arrête au $n + 1$ ème lancé, ie on a obtenu n fois face avant d'obtenir pile. On pose en plus A_{-1} l'événement : le jeu ne s'arrête pas.

Alors $(A_n)_{n \geq -1}$ est un système complet d'événements. Essayons de construire un probabilité raisonnable.

On doit avoir $\sum_{n=-1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$. Il semble raisonnable de poser $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ (quelle hypothèse faisons nous sur chaque lancé, sur la pièce?)

Alors $\mathbb{P}(A_{-1}) = 0$ est la seule possibilité (calculer la somme des probabilités imposées), ce qui semble raisonnable.

I.2.10 Définition

Soit A un événement.

1. Si $A \neq \emptyset$ et $\mathbb{P}(A) = 0$ on dit que A est **négligeable**.
2. Si $A \neq \Omega$ et $\mathbb{P}(A) = 1$ on dit que A est presque sûr.

I.2.11 Exemple

Notre jeu de pile ou face se termine presque sûrement.

II Calcul de probabilités

II.1 Propriétés des probabilités

II.1.1 Proposition (Adaptation de la 1ère année)

Soit (Ω, T, \mathbb{P}) un espace probablisé. Soient A, B deux événements et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$.
5. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k)$.
6. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$ et

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

On retrouve le cours de première année en prenant un système complet fini (tous les A_n sont vides sauf les quelques premiers).

Preuve.

1. $\Omega = \Omega \sqcup \emptyset$
2. $\Omega = A \sqcup A^c$
3. $B = A \sqcup (B \setminus A)$
4. $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$
5. Par récurrence, en partant du cas $n = 2$ prouvé par le point précédent.
6. B est la réunion disjointe des $B \cap A_n$. ■

II.1.2 Théorème

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion ($\forall n \in \mathbb{N} A_n \subset A_{n+1}$) alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Le résultat important est l'existence de ces limites.

Preuve.

Le complémentaire d'une réunion étant l'intersection des complémentaires, contentons-nous de prouver le premier point.

Supposons donc $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante au sens de l'inclusion. Alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc converge.

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, posons $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ et $B_0 = A_0$. Alors les B_i sont disjoints deux à deux (pour imaginer, B_n est ce qu'il manquait à A_{n-1} pour devenir l'ensemble A_n qui est "plus grand").

De plus, $\bigcup_{k=0}^n B_k = A_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$. Ainsi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1}))$.

La série est télescopique et converge vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_0)$, ce qui conclut la preuve. ■

II.1.3 Proposition (Sous-additivité)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Preuve.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$ qui est une suite croissante d'événements. Alors

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et d'après le théorème précédent, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbb{P}(B_n))$.

Ainsi $\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite et on peut passer à la limite l'inégalité 5 de la proposition II.1.1 (Rappel : l'hypothèse du passage à la limite des inégalités est seulement l'existence des limites). ■

II.1.4 Événements négligeables

Si tous les A_n sont négligeables, alors leur réunion l'est aussi.

II.2 Probabilités conditionnelles**II.2.1 Définition-Proposition**

Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

1. Pour un événement A , la probabilité de A sachant B est $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
2. L'application $\mathbb{P}_B : \begin{cases} T & \rightarrow [0, 1] \\ A & \mapsto \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) \end{cases}$ est une probabilité. C'est la probabilité conditionnelle sachant B .

II.2.2 Proposition (Formule des probabilités composées)

1. Pour A, B des événements, si $\mathbb{P}(B) > 0$ alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$. Rappelons en plus que $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$
2. Si A_1, \dots, A_n sont des événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$ alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap_{k=0}^{n-1} A_k\right)$$

II.2.3 Exemple

Un savant fou choisi dans la salle de classe des cobaye parmi les élèves. Aucune chance de s'en sortir. Quelle est la probabilité pour qu'il choisisse successivement un garçon, une fille puis un garçon ?

On cherche $\mathbb{P}(G_1 \cap F_2 \cap G_3) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(F_2|G_1)\mathbb{P}(G_3|G_1 \cap F_2)$.

II.2.4 Proposition (Probabilité totales)

Il s'agit de traduire les propriétés des probabilités vis-à-vis de l'intersection en termes de probabilités conditionnelles.

1. Soit A un événement ni négligeable ni presque sûr ($\mathbb{P}(A) \in]0, 1[$). Alors A, \bar{A} forment un système complet d'événements et pour tout événement B , $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})$.
2. Pour $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements (y compris fini) et B un événement

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

où l'on convient que $\mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n) = 0$ si $\mathbb{P}(A_n) = 0$.

Preuve.

Immédiat. ■

II.2.5 Exemple

Un site internet a une audience séparée en deux types : les respectueux qui représentent 90% des inscrits et les trolls. Les premiers ont un probabilité de 0.1 de répondre ou commencer une discussion houleuse sur une journée, les second 0.7.

Un nouvel utilisateur s'inscrit. Avec quelle probabilité participe-t-il à une discussion houleuse dès le premier jour ? Dans les deux premiers jours ?

Notons T l'événement "le nouvel arrivant est un troll" et D l'événement "il participe à une discussion houleuse".

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}(D|T) + \mathbb{P}(\bar{T}) \times \mathbb{P}(D|\bar{T}) = \frac{1}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{4}{25}.$$

Ainsi $\mathbb{P}(\bar{D}) = \frac{21}{25}$ et la réponse à la deuxième question est $1 - \left(\frac{21}{25}\right)^2 = 1 - \frac{441}{625} = \frac{184}{625} \approx 0.3$ (préciser l'hypothèse).

II.2.6 Proposition (Formule de Bayes)

Soient A, B deux événements non négligeables ($\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$). Alors $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}(A|B)$.

II.2.7 Exemple

Malfaçon ou triche organisée? Toujours est-il que sur les 100 dés à 6 faces produits aujourd'hui 25 on une probabilité de 1/2 de tomber sur 6...

On choisi un de ces dés et on le lance. Il tombe sur 6. Avec quelle probabilité est-il pipé?

Notons S l'événement "le dé tombe sur 6" et T l'événement "le dé choisi est pipé". On cherche $\mathbb{P}(T|S)$.

On connaît $\mathbb{P}(S|T) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{4}$. Il nous manque $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(S|T) + \mathbb{P}(\bar{T})\mathbb{P}(S|\bar{T}) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$.

Ainsi $\mathbb{P}(T|S) = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(S|T)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{1}{2}$.

II.2.8 Cas d'application

Généralement l'énoncé donne $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(B)$. Il faut calculer $\mathbb{P}(A)$ par la formule des probabilités totales.

II.3 Événements indépendants**II.3.1 Définition**

Soient A, B deux événements. On dit que A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

II.3.2 Lien avec les probas conditionnelles

Si on suppose $\mathbb{P}(B) > 0$, la condition A et B sont indépendants devient $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$. La réalisation de A ne dépend pas de celle de B .

II.3.3 Définition

Soient A_1, \dots, A_n des événements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants ssi

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

II.3.4 Attention

Trois événements indépendants 2 à 2 ne sont pas forcément mutuellement indépendants.

II.3.5 Complémentaires

Si (A, B) sont indépendants, il en est de même de (A^c, B) , (A, B^c) , (A^c, B^c) . On peut généraliser ce résultat à des événements mutuellement indépendants (et mettre des complémentaires ou non où bon nous semble).

II.3.6 En pratique

L'énoncé supposera très souvent que certains événements sont indépendants, voire mutuellement indépendants. On pourra alors très facile calculer des probabilités d'intersection et de réunion ($1 - \mathbb{P}$) en passant au complémentaire, grâce à la remarque précédente.

III Variables aléatoires**III.1 Lois****III.1.1 Définition**

1. Une variable aléatoire **discrète** est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ où $X(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs de X) est dénombrable ou fini.
2. Si A est un ensemble de valeurs de X , on note $(X \in A)$ l'événement " X prend l'une des valeurs dans A ", c'est à dire l'ensemble $X^{-1}(A)$.
3. Si x est l'une des valeurs que peut prendre X (ie. $x \in X(\Omega)$), on note $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$, c'est à dire " X prend la valeur x "

Valeurs

Le première chose à préciser sur une variable aléatoire (en théorie comme en pratique) est l'ensemble de ses valeurs.

III.1.2 Théorème

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω . Notons $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble de ses valeurs. Alors $((X = x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Preuve.

1. Si $i \neq j$, et $\omega \in \Omega$ $\omega \in (X = x_i) \cap (X = x_j)$ signifie que $X(\omega) = x_i$ et $X(\omega) = x_j$ ce qui est absurde.
2. Si $\omega \in \Omega$, notons $x_n = X(\omega)$. Alors $\omega \in (X = x_n)$.
Ces deux points prouvent que les événements $(X = x_n)$ sont deux à deux incompatibles et que leur réunion est Ω . ■

III.1.3 Exemple

Revenons à notre pile ou face. On note X le numéro du lancé ou le jeu se fini. Calculer pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{P}(X = n)$ ainsi que leur somme.

III.1.4 Définition

Soit X une variable aléatoire discrète. La loi de X est l'application $\mathbb{P}_X : \begin{cases} X(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \mathbb{P}(X = x) \end{cases}$.

Avec les notations du théorème précédent, il s'agit de donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = x_n)$.

III.1.5 Somme

D'après le théorème précédent, la loi de X vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$.

Réciproquement, on admet que si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors on peut trouver une probabilité \mathbb{P} sur Ω et une variable aléatoire X telles que $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.

III.2 Loi usuelles**III.2.1 Répétitions**

Considérons une répétition illimité de la même expérience aléatoire (par exemple on lance deux dés), et on s'intéresse à un résultat précis que l'on nomme succès (on considère donc une répétition d'expérience "de Bernoulli") qui apparaît avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose les expériences mutuellement indépendantes.

On note X le rang du premier succès. Donner la loi de X .

III.2.2 Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) ssi $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^k$.

En particulier, l'ensemble des valeurs de X est $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

III.2.3 Proposition

Soit X une variable aléatoire, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour un $p \in]0, 1[$. Soient $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
 $\mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k)$.

On dit que la loi géométrique est sans mémoire.

Preuve.

On a au niveau des événements, $(X > n + k) \cap (X > n) = (X > n + k)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \frac{\mathbb{P}(X > n + k)}{\mathbb{P}(X > n)}.$$

$$\text{Or } \mathbb{P}(X > n + k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n + k + 1 + i) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(1 - p)^{n+k+i} = p(1 - p)^{n+k} \frac{1}{1 - (1 - p)} = (1 - p)^{n+k}.$$

De même $\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$ et $\mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k$. Ce qui conclut. ■

Explication Le fait de savoir que les n premières expériences ont échoués ne présage en rien du nombre d'échec ou de succès à venir.

III.2.4 Exemple

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha \lambda^n}{n!}$ converge et que sa somme soit 1.

III.2.5 Définition

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} suit la loi de Poisson de paramètre λ (noté $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$) ssi $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

III.2.6 Cas d'utilisation

On peut utiliser cette loi pour approximer une loi binomiale de paramètre faible (on le verra dans le prochain chapitre de probabilités), ou pour modéliser une expérience où les valeurs de X ont de fortes chances d'être faible. Nous verrons l'interprétation de λ plus loin dans le chapitre.

III.3 Variables indépendantes**III.3.1 Définition**

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω . On note $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ et $\{y_m | m \in \mathbb{N}\}$ les valeurs possibles de X et Y respectivement.

1. La **loi conjointe** du couple (X, Y) est la loi décrite par la donnée de $\mathbb{P}(X = x_n, Y = y_m)$ pour toutes les valeurs de n et m .

2. Les lois marginales de la loi conjointe de (X, Y) sont les lois de X et Y .
3. Pour $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathbb{P}(X = x_{n_0}) \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_{n_0})$ est la loi donnée par $\mathbb{P}(Y = y_m | X = x_{n_0})$

III.3.2 Calcul de lois

Notons pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $p_{n,m} = \mathbb{P}(X = x_n, Y = y_m)$. ON suppose donc la loi conjointe connue.

1. Pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\sum_{m=0}^{+\infty} p_{n,m} = \mathbb{P}(X = x_n)$ car $((Y = y_m))_{m \in \mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements. (On retrouve la première loi marginale par somme).

De même, pour un $m \in \mathbb{N}$ fixé, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m} = \mathbb{P}(Y = y_m)$.

2. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} p_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m} = 1$.

3. Pour n, m fixés, $\mathbb{P}(Y = y_m | X = x_n) = \frac{\mathbb{P}(Y=y_m, X=x_n)}{\mathbb{P}(X=x_n)} = \frac{p_{n,m}}{\sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k}}$.

III.3.3 Exemple

On lance une pièce qui tombe sur pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$ (et donc face avec une probabilité $q = 1 - p \in]0, 1[$). On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang du second.

Donner la loi conjointe. Soient $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- Si $n \geq m$ alors $\mathbb{P}(X = n, Y = m) = 0$.
- Si $1 \leq n < m$, $\mathbb{P}(X = n, Y = m) = \mathbb{P}(Y = m | X = n) \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{m-n-1} \times p(1-p)^{n-1} = p^2(1-p)^{m-2}$.

Vérifions que la somme vaut 1.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = m) &= \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{m-1} p(1-p)^{m-n-1} \times p(1-p)^{n-1} \\ &= \sum_{m=2}^{+\infty} (m-1)p^2(1-p)^{m-2} = p^2 \sum_{m=1}^{+\infty} m(1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

On re connaît la dérivée de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ évalué en $x = 1 - p$.

Ainsi $\sum_{m=2}^{+\infty} (m-1)(1-p)^{m-2} = \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p^2}$ et tout est bien fini bien.

III.3.4 Définition

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω . on dit qu'elles sont indépendantes ssi $\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$ ie ssi les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont deux à deux indépendants pour toutes les valeurs possibles de x et y .

III.3.5 Exemple

Les variables aléatoires de l'exemple III.3.3 ne sont pas indépendantes. Prendre par exemple $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 2) \mathbb{P}(Y = 2)$

III.3.6 Somme de deux lois de Poisson

Soient X, Y deux variables $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, indépendantes. On note $Z = X + Y$. Calculer la loi de Z .

— Premièrement, Z est à valeurs dans \mathbb{N} , comme X et Y .

— Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda-\mu} \frac{1}{n!} (\lambda + \mu)^n$.

Ainsi $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

III.3.7 Proposition

Soient X, Y deux variables indépendantes et $A \subset X(\Omega), B \subset Y(\Omega)$. Alors $\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$.

Extension des notions de premières années On admet que les résultats suivants sont encore vrais pour des variables aléatoires discrètes.

III.3.8 Proposition

Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes et si on peut calculer $f(X)$ et $g(Y)$ pour des fonctions f et g alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

III.3.9 Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n variables aléatoires discrètes sur Ω . On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes ssi pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}, \forall x_1 \in X_{i_1}(\Omega), \dots, x_k \in X_{i_k}(\Omega) \mathbb{P}(X_{i_1} = x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_{i_k} = x_k) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(X_{i_j} = x_j)$.

Autrement dit, on peut calculer toute probabilité d'intersection finie par produit.

III.3.10 Avec des événements

La proposition III.3.7 s'étend au cas de variables mutuellement indépendantes.

III.3.11 A retenir

Comme pour les événements, on supposera souvent dans l'énoncé que des variables aléatoires sont indépendantes. On pourra alors calculer des probabilités d'intersection (et) par produit.

III.4 Espérance, variance

Explication La notion d'espérance s'étend de manière naturelle aux variables aléatoires discrète. Par contre l'existence de l'espérance n'est pas garantie a priori, vu qu'il s'agit de la convergence d'une série numérique.

III.4.1 Définition

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On dit que X est d'espérance finie ssi $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge **absolument**.

Dans ce cas, on appelle **espérance de X** et on note $E(X)$ le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$.

Explication Comme pour le théorème sur le produit de Cauchy il nous faut ici supposer la convergence absolue. La raison est hors de notre programme : la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre dans lequel on calcule celle-ci. En particulier ici, on peut numéroter les éléments de $X(\Omega)$ comme bon nous semble sans changer l'espérance (encore heureux !). En pratique, nos variables aléatoires sont très souvent à valeurs dans \mathbb{N} et l'ordre de sommation est naturel (mais pas imposé).

III.4.2 Exemple

On peut définir une loi à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mathbb{P}(X = n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$ car la série converge et est de limite 1.

Dans ce cas X n'est pas d'espérance finie.

III.4.3 Espérances de référence

1. Soit $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour un $p \in]0, 1[$.

La série numérique $\sum_{n \geq 1} np(1-p)^{n-1}$ converge par comparaison de séries à termes po-

sitifs (car $n(1-p)^{n-1} = o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$) donc converge absolument. De plus, $\sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} =$

$p \frac{1}{(1-(1-p)^2)} = \frac{1}{p}$ en dérivant terme à terme la série géométrique et en évaluant en $1-p \in]-1, 1[$.

Interprétation : Si la probabilité de succès élémentaire est p , on s'attend à faire en moyenne $\frac{1}{p}$ essais avant d'obtenir un succès.

2. Soit $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$.

La série $\sum_{n \geq 0} ne^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ converge absolument par produit par une constante d'une série exponentielle et $E(X) = \lambda$.

Ainsi le paramètre λ d'une loi de Poisson s'interprète comme son espérance (ou intuitivement, valeur moyenne).

III.4.4 Proposition (Propriétés de l'espérance)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω .

1. Linéarité. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.
2. Positivité : si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.
3. Croissance. Si $\forall \omega \in \Omega X(\omega) \leq Y(\omega)$ (que l'on note $X \leq Y$) alors $E(X) \leq E(Y)$.
4. Si X et Y sont **indépendantes** alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Preuve.

1. Admis. on peut appliquer le théorème de transfert à la VA (X, Y) et la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ et utiliser le cours sur les séries absolument convergentes.
2. Evident : une série à termes positifs convergent a une somme positive.
3. Conséquence directe (et classique !) des deux propriétés précédentes.
4. Admis. ■

III.4.5 Exemple

1. Ceci est tout à fait en accord avec notre calcul de la loi d'une somme de deux lois de Poisson indépendantes.
2. Si X est d'espérance finie $m = E(X)$, alors $X - E(X)$ est une variable **centrée** ie d'espérance nulle.

III.4.6 Théorème (Théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs réelles. $f(X)$ est d'espérance finie ssi $\sum_{n \geq 0} f(x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente.

Alors $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$. Ainsi l'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X .

Preuve.

Admis. ■

2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$.

La série $\sum_{n \geq 0} n^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ converge (d'Alembert, ou produit par une puissance dans une série entière, ce qui ne modifie pas le rayon de convergence).

De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda})$.

Ainsi $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

III.4.10 Proposition

Soit X une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$. $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

III.4.7 Exemple

Montrer que 2^X est d'espérance finie et calculer son espérance quand $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

III.4.8 Définition-Proposition

Soit X une variable aléatoire discrète. Si X^2 est d'espérance finie alors X aussi. Dans ce cas :

1. on appelle **variance** de X le nombre réel positif $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$.

2. on appelle **écart-type** de X le nombre réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Si $\sigma(X) = 1$, on dit que X est réduite.

III.4.9 Exemple

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour un $p \in]0, 1[$.

La série $\sum_{n \geq 1} n^2 p(1-p)^{n-1}$ converge par comparaison de séries à termes positifs car $n^2(1-p)^{n-1} = o_{+\infty} n^2$. Donc X possède une variance

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (sur $] -1, 1[$) et $x \in] -1, 1[$.

Alors $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$. Ainsi

$x f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n-1}$ (le premier terme est nul) et $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = f'(x) + x f''(x)$

$x f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}$.

On a donc $E(X^2) = p(\frac{1}{p^2} + \frac{2(1-p)}{p^3}) = 2\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$.

Finalement $V(X) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$