Table des matières

I Elements propres

I.1 Valeurs propres

Définition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de f ssi il existe un $x \in E$ **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$. Un tel x **non nul** est appelé un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de f et noté $Sp(f)$.

I.2 Espaces propres

Définition 2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de E. L'espace propre associée à λ est l'espace $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f) \neq \{0_E\}$.

Il s'agit de l'ensemble composé du vecteur nul et de tous les vecteurs propres associés à λ. On le note parfois aussi E_λ.

Théorème 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots \lambda_p$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes de f. Pour $i \in [\![1, p]\!]$ on pose v_i un vecteur propre associé à λ_i (il est donc non nul).

La famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

Théorème 2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots \lambda_k$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes de f.

La somme $\sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$ est directe.

I.3 Stabilité ($\star$)

Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Alors $E_\lambda(f)$ est stable par f.

Proposition 2
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.
2. Tout espace propre de f est stable par g.

Evidemment, on peut échanger les rôles de f et g dans ces résultats.

II En dimension finie

II.1 Extension aux matrices

Définition 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les valeurs propres et vecteurs propres de A sont les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire canoniquement associée à A, $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$.

On note $Sp(A) = Sp(f_A)$ et les espaces propres sont notés $E_\lambda(A)$.

II.2 Polynôme caractéristique

Définition-Proposition 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme χ_A associée à la fonction $\chi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \det(xI_n - A) \end{array} \right.$.

χ_A est un polynôme unitaire (son coefficient dominant est 1) de degré n.

Proposition 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le coefficient constante de χ_A est $(-1)^n \det(A)$ et le coefficient de X^{n-1} est $\operatorname{tr}(A)$.

Ce résultat est également valable pour les endomorphismes.

Définition 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique χ_f de f est le polynôme associé à l'application $x \mapsto \det(xf - Id_E)$. C'est un polynôme unitaire de degré n.

Si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E alors $\chi_f = \chi_A$.

II.3 Lien avec les valeurs propres

Théorème 3
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

1. λ est une valeur propre de f ssi $\chi_f(\lambda) = 0$ ie λ est une racine de χ_f.
2. λ est une valeur propre de A ssi $\chi_A(\lambda) = 0$ ie λ est une racine de χ_A.

Corollaire 1
Tout endomorphisme de E possède n valeurs propres dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité).

Proposition 4
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A, C sont des matrices carrées (de tailles quelconques, y compris 1). Alors $\det(M) = \det(A)\det(C)$.

Théorème 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$. Notons $\mu(\lambda)$ la multiplicité de λ comme racine de χ_f (on appelle cette quantité la multiplicité de la valeur propre λ).

Alors $1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant \mu(\lambda)$

III Diagonalisation

III.1 Diagonalisabilité

Définition 5

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable ssi son application linéaire canoniquement associée est diagonalisable ssi A est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 5
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E composée de vecteurs propres de f.

Dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale et sa diagonale est composée des valeurs propres de f associées aux vecteurs propres de $\mathcal{B}$.

Théorème 5
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable ssi $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda = E$.

Théorème 6
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in Sp(f)$ $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda)$ (la multiplicité de λ en tant que racine de χ_f).

Proposition 6
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. SI χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples ALORS f est diagonalisable.

III.2 Applications

Théorème 7
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite et $p \geqslant 1$. On suppose qu'il existe $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}$.

1. Le polynôme $P = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k + X^p$ est appelé polynôme caractéristique de (u_n).
2. Si P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ alors il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k^n$.

IV Trigonalisation

IV.1 Théorie

Théorème 8
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ ssi il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure (on dit que f est trigonalisable).

La diagonale est constituée de toutes les racines de χ_f, avec multiplicité (une racine de multiplicité r apparaît r fois sur cette diagonale).

Corollaire 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ ie il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} est triangulaire supérieure.

IV.2 Conséquences pratiques

Proposition 7
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines (complexes) de χ_f non nécessairement distinctes.

1. $\mathrm{tr}(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$
2. $\det(f) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k$

Le même résultat vaut pour les matrices.