Devoir surveillé n°3

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Donner le développement en série entière (ainsi que l'intervalle de validité) de : $\frac{1}{1-2x}, e^{-x}$.
2. A quelles condition sur $x \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 5-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
3. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} x^n$.
   (a) Calculer le rayon de convergence R de cette série entière.
   (b) Montrer la convergence de cette série pour les valeurs $x = R$ et $x = -R$.
   (c) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ converge. On note ℓ sa limite.
   (d) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4}$ et $I_N = \sum\limits_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)^4}$.
   Donner un lien entre S_{2N}, S_N et I_N.
   (e) On note $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ et $\beta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$. Exprimer α et β en fonction de ℓ.

Exercice 2

1. Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$.
2. Montrer que la fonction qui, à tout réel t, associe e^{-t^2}, est développable en série entière sur un domaine $\mathcal{D}$ que l'on précisera, et donner ce développement.
3. Montrer que

$$\int_0^1 e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

4. Pour tout entier naturel n, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$. On admet le résultat suivant :

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$$

   (a) Proposer, uniquement avec les données fournies par l'exercice, une méthode permettant de déterminer une valeur numérique approchée de $\int_0^1 e^{-t^2} \mathrm{d}t$ avec une précision $\varepsilon > 0$ donnée.
   (b) Donner un nombre rationnel r qui soit une valeur numérique approchée de $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ à 10^{-3} près (r pourra être laissé sous forme de somme de fractions : il n'est pas demandé d'exprimer r sous forme de fraction irréductible ni d'en donner une valeur numérique approchée).

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $\alpha_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

On pose également la matrice $A_n = (a_{p,q})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$ où $a_{p,q} = \alpha_n^{(p-1)(q-1)}$. On prendra garde au fait que $a_{p,q}$ dépend de p, q mais aussi de n.

1. On note $\alpha_3 = j$.
   (a) Calculer j^3 et $1 + j + j^2$.
   (b) Calculer A_3^2, A_3^4.
   (c) Calculer $\det(A_3)$.
2. Calculer A_4^2, A_4^4 et $\det(A_4)$

3. Soit $r \in \mathbb{Z}$.
   (a) On suppose que r est un multiple de n. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (\alpha_n^r)^k$.
   (b) Calculer la somme de la question précédente dans le cas où r n'est pas un multiple de n.
4. Calculer A_n^2 et montrer que $A_n^4 = n^2 I_n$.
5. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det(A_n)$? Qu'en déduire pour la matrice A_n ?
6. On cherche les valeurs propres de A_n. Aucune connaissance de cours sur la réduction n'est requise ici.
   (a) On suppose que pour un $X \in \mathbb{C}^n$ non nul et un $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $A_n X = \lambda X$.
   Montrer que $\lambda \in \{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$.
   (b) D'après le cours, on a alors, pour des entiers naturels $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et β_4 les relations :
   — $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = n$,
   — $\mathrm{tr}(A_n) = \beta_1\sqrt{n} - \beta_2\sqrt{n} + \beta_3 i\sqrt{n} - \beta_4 i\sqrt{4}$,
   — $\det(A_n) = (\sqrt{n})^{\beta_1}(-\sqrt{n})^{\beta_2}(i\sqrt{n})^{\beta_3}(i\sqrt{n})^{\beta_4}$.
   Calculer ces quatre entiers dans le cas $n = 3$.
   (c) Même question pour le cas $n = 4$.
   (d) Calculer un argument de $\det(A_3)$ et un argument de $\det(A_4)$.
7. On admet (voir le TD) que $\det(A_n) = \prod\limits_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (\alpha_n^{q-1} - \alpha_n^{p-1})$
   (a) Calculer $\sum\limits_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (p+q)$ et remarquant que cette somme est égale à $\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{1 \leqslant p,q \leqslant n} (p+q) - \sum\limits_{p=1}^{n} (p+p)\right)$
   (b) Montrer qu'un argument θ_n de $\det(A_n)$ est $\frac{\pi}{4}(3n-2)(n-1)$.

Exercice 4

Un enseignant ronchon doit corriger un tas de $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ copies.

Pour chaque copie, il a une probabilité $q \in]0,1[$ (indépendante de la copie) de se mettre à ronchonner, laisser la copie pour plus tard et continuer avec la copie suivante. On note $p = 1 - q$

On note X_1 le nombre de copies qu'il corrige après avoir examiné chaque copie du tas initial.

1. Donner la loi et l'espérance de X_1.
2. Question subsidiaire (y répondre vous expose à des poursuites) : quelle(s) technique(s) utiliser pour faire tendre q vers 0 ?
3. Dans cette question uniquement on suppose que $X_1 = k$ pour une valeur de k dans un ensemble à préciser.
   Notre correcteur recommence sa correction avec les $n - k$ copies restantes (et en suivant toujours les mêmes règles). On note X_2 le nombre de copies corrigées.
   Donner la loi de X_2 (sachant $(X_1 = k)$).
4. On note $Y_2 = X_1 + X_2$. Expliquer en une phrase ce que représente la valeur de Y_2. Quelles sont les valeurs que peut prendre Y_2 ?
   Montrer que Y_2 suit une loi binomiale de paramètre n et $1 - q^2$.
5. [1] On réitère l'opération et on note X_N le nombre de copies corrigées au N-ième essai et $Y_N = X_1 + \cdots + X_N$.
   Montrer par récurrence que $Y_N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - q^N)$
6. Montrer que $E(Y_N) \underset{N \to +\infty}{\to} n$ et donner un équivalent de $E(Y_N) - n$.
7. A partir de quel rang N a-t-on $E(Y_N) \geqslant n - 1$?

Exercice 5

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

1. Trouver les 3 réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ tels que $\det(\lambda_i I_3 - A) = 0$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$.
2. Résoudre $AX = \lambda_i X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$. On notera u_1, u_2, u_3 les vecteurs directeurs respectivement trouvés.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Calculer $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
5. On note P la matrice de $\mathcal{B}$ dans la base canonique. Calculer P et P^{-1} et donner un lien entre A, P, M.
6. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculs glissants.