# Elements propres

**Exercice 1**
Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $f$ alors $\lambda^k$ est valeur propre de $f^k$.
2. Montrer que $f$ est inversible (bijective) si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de $f$. Dans ce cas, déterminer les valeurs propres de $f^{-1}$ en fonction de celles de $f$.
3. Si $f$ est nilpotent, montrer que la seule valeur propre de $f$ est 0.

**Exercice 2**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les éléments propres d'un projecteur de $E$ et de la symétrie associée.

**Exercice 3**
Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array} \right.$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'' \end{array} \right.$. Déterminer les éléments propres de $f$ et $\varphi$ (valeurs propres, espaces propres associés)

**Exercice 4**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = I_n$ pour un $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Déterminer les valeurs propres possibles de $A$.

**Exercice 5**

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A$ n'est pas une homothétie et si $A$ n'admet qu'une seule valeur propre, $A$ est-elle diagonalisable ?
2. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Un endomorphisme nilpotent est-il diagonalisable ?

**Exercice 6**
Déterminer les coefficients inconnus de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b' & c' \\ 3 & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

pour qu'elle admette pour vecteurs propres $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ et $(0, 1, -1)$. Quelles sont alors les valeurs propres ?

**Exercice 7**
Montrer que $A$ et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

**Exercice 8 ($\star$)**
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. On suppose de plus que $A$ possède $n$ valeurs propres distinctes (et donc...). Montrer que $B$ est diagonalisable via la même base.

# Diagonalisabilité

**Exercice 9**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $E$ est de dimension finie. On suppose que $f$ est diagonalisable et que $Sp(f) = \{0, 1\}$. Montrer que $f$ est un projecteur.

Enoncer un résultat similaire pour les symétries.

**Exercice 10**
Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, déterminer une base de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11**
Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$

1. Sans calculer de polynôme caractéristique, montrer que 1 et $1 + \frac{1}{n}$ sont valeurs propres de $A_n$.
2. La matrice $A_n$ est-elle diagonalisable ? Inversible ?
3. On note $B_n = A_1 A_2 \dots A_n$. La matrice $B_n$ est-elle diagonalisable ? Inversible ? Si oui, exhiber $B_n^{-1}$.

**Exercice 12**
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$$

Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 13**

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. On commencera par donner des solutions [1] puis vérifier que ce sont les seules [2].

**Exercice 14**

Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$ complexes vérifiant $A = B^2$ ; les assertions suivantes sont-elles vraies ?

Indication : on pensera aux endomorphismes/matrices dont on sait s'il sont diagonalisable ou pas : projecteur, symétrie, nilpotent.

1. Si $B$ est diagonalisable, $A$ l'est aussi.
2. Si $A$ est diagonale, $B$ l'est aussi.
3. Si $A$ est diagonalisable, $B$ l'est aussi.
4. Si $A = \lambda\,\mathrm{id}$ avec $\lambda \neq 0$ alors $B$ est diagonalisable.
5. ( $\star$ ) Si $A$ est diagonalisable et inversible, $B$ est diagonalisable.

# Approfondissement

**Exercice 15**

A quelles conditions portant sur $\alpha$, $\beta$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

**Exercice 16**

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ où $a_{i,j} = \frac{i}{j}$. Montrer que $A$ est diagonalisable. Indication : calculer le rang de $A$.

**Exercice 17**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ P & \mapsto & (X-1)(X-2)P' - 2XP \end{array} \right.$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que si $P \in E$ est vecteur propre de $\varphi$ alors $\deg(P) = 2$.
3. Déterminer les éléments propres de $\varphi$.

1. Plutôt facile
2. Plus difficile

**Exercice 18 (Important)**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $E$ de dimension finie. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. On note $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^k$ (attention à la puissance 0).

Montrer que si $\lambda \in Sp(f)$ et $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $P(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$. Trouver dans les exercices précédents 2 exemples de ce résultat

**Exercice 19**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Calculer $A^3$ et en déduire les valeurs propres possible de $A$.
2. Donner les espaces propres de $A$.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$. Diagonaliser $M$.

**Exercice 20**

On possède deux urnes. Initialement, il y a deux boules blanches dans $U_1$ et deux noires dans $U_2$. À chaque tirage, on prend une boule dans $U_1$ et une boule dans $U_2$, et on les échange. On appelle $X_k$ le nombre de boules blanches dans $U_1$ après le $k^e$ tirage. On pose $X_0 = 2$.

1. Que penser de $X_k(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possible pour $X_k$ ?
2. On pose
$$Y_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 0) \\ \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \end{pmatrix}$$
Trouver une matrice $A$ telle que $Y_{k+1} = AY_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
En déduire l'espérance de $X_k$.
3. Trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants $Z_1, Z_2, Z_3$ de $A$ puis décomposer $Y_0$ dans cette base.
4. En déduire la loi de $X_k$ puis les limites quand $k$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 21**

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Pour $P \in \mathcal{L}(E)$, on pose $f(P) = X(1-X)P' + nXP$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $f$ en résolvant une équation différentielle.
3. $f$ est-elle diagonalisable ?