Devoir maison de l'avent

Un premier rendu est attendu le 21/12 au plus tard, traitant les questions datées du 01/12 au 17/12.
Vous pouvez rédiger ce devoir à deux, sous les mêmes conditions que précédemment.

Exercice 1

1. Samedi 01/12 : Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Rappeler la définition de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et donner un lien entre $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ (les coordonnées dans $\mathcal{B}$) et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}$ (les coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

   On donnera X en fonction de X' et X' en fonction de X.
2. 02/12 : Soient $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ trois suites complexes. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \lambda_1\alpha_n + \lambda_2\beta_n + \lambda_3\gamma_n$.

   Montrer que si $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont bornées alors (u_n) est bornée.

   Rappel : (α_n) est bornée se traduit par l'existence d'une constante (ie indépendante de n) $M_a \in \mathbb{R}^+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\alpha_n| \leqslant M_a$.
3. 03/12 : Une histoire de rennes.

   Trois rennes notés A, B et C jouent à saute–renne [1] dans un grand champ. A saute par dessus B et se retrouve en position symétrique (par rapport à B). Puis B saute par dessus C et enfin C saute par dessus A (qui avait déjà bougé) et on recommence jusqu'à épuisement des joueurs.

   On repère les positions de nos rennes dans un repère orthonormé du plan par leurs affixes complexes. Au départ l'affixe de A est a_0, celle de B est b_0 et celle de C est c_0.

   (a) 03/12 : Calculer a_1, b_1 et c_1 les affixes respectives de A, B et C au bout d'une phase de jeu. On pourra introduire des affixes de vecteurs.

   (b) 04/12 : On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Montrer que $X_n = M^n X_0$.

   (c) 05/12 : Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi_M(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 5\lambda + 1$.

   (d) 06/12 : Donner les valeurs propres de M. Que peut-on déjà en déduire ?

   (e) 07/12 : Déterminer une base de $E_1(M)$. On note $u \in \mathbb{C}^3$ le vecteur directeur de $E_1(M)$ qui a 1 comme première coordonnée.

   (f) 08/12 : On pose $\varepsilon = \pm 1$. D'après le cours, quelle est la dimension de $E_{-2+\varepsilon\sqrt{5}}(M)$? Quelle est la conséquence sur le système $MX = (-2 + \varepsilon\sqrt{5})X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$?

   (g) 09/12 : Résoudre le système précédent et exhiber une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ constituée de vecteurs propres de M.

   (h) 10/12 : Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $M = PDP^{-1}$. On ne demande pas le calcul de P^{-1}.

   Exprimer ensuite M^n puis X_n en fonction de P, D, P^{-1}.

   (i) 11/12 : On pose $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = Y_n = P^{-1}X_n$ les coordonnées de X_n dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que les 3 suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont géométriques de raisons à préciser.

   (j) 12/12 : Soit $q \in \mathbb{C}$. A quelle condition $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

   (k) 13/12 : Donner une condition nécessaire et suffisante sur α_0, β_0 et γ_0 pour que $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) soient 3 suites bornées.

   (l) 14/12 [2] : Montrer que $(a_n), (b_n), (c_n)$ sont toutes les trois bornées ssi $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont toutes les 3 bornées.

   (m) 15/12 : Montrer que nos 3 rennes restent dans une partie bornée du plan (ie. ne sortent pas de notre grand champ) ssi X_0 appartient à un certain plan vectoriel (sous espace de $\mathbb{C}^3$) dont on donnera une base ainsi qu'une équation cartésienne.

1. une variante du saute mouton classique
2. Question plus délicate. on se servira deux fois de la question du 02/12

4. 16/12 : Interlude graphique. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $r(t) = \exp(\cos(t)) - 2\cos(4t)$ et on considère la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = r(t)\sin(t) \\ y(t) = r(t)\cos(t) \end{cases}$ Donner une période de r puis étudier les éventuelles symétries du support de cette courbe.
5. 17/12 : Poursuivons sur cette courbe. En python [3], créer les variables :
   — `T` la liste contenant les flottants équirépartis entre 0 et 2π, de longueur 250.
   — `R` la liste contenant les valeurs de r en tous les temps contenus dans `T`.
   — `X` la liste correspondante pour la fonction x puis `Y`.

   Il reste à utiliser `plt.plot(X, Y)` pour relier tous les points de notre support ainsi calculés et admirer le résultat de notre dur labeur.
6. 18/12 : Une histoire de Père Noël.
   Ce cher vieux bonhomme a pour mission de distribuer n cadeaux (distincts) à n enfants. Malheureusement ses yeux ne sont plus ce qu'ils étaient...
   On considère que l'enfant numéro i souhaite recevoir le cadeau numéro i.
   (a) 18/12 : On représente une distribution par un n-uple : on place dans l'ordre les numéros des cadeaux. Le premier élément est le numéro du cadeau donné au premier enfant, le deuxième élément le numéro du cadeau donné au deuxième enfant et ainsi de suite.
   Dans le cas $n = 2$ on a donc 2 distributions possibles : $(1, 2)$ et $(2, 1)$. La seconde est une mauvaise distribution car aucun enfant n'obtient le cadeau souhaité.
   Donner la liste de toutes les distributions possible de 3 cadeaux.
   (b) 19/12 : Dans le cas général, combien y a-t-il de distributions possibles ?
   (c) 20/12 : On note D_n le nombre de distribution où aucun enfant ne reçoit le cadeau qu'il souhaitait. Calculer D_1 et D_3. On a déjà vu que $D_2 = 1$
   (d) 21/12 [4] : On admet que pour $n \geqslant 1$, on a $D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$. Calculer D_4 et D_5.
   (e) 22/12 [5] : Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = D_{n+1} - (n+1)D_n$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire que $\forall n \geqslant 1\ D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}$
   (f) 23/12 : Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1\ D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
   (g) Lundi 24/12. Donner l'expression de la probabilité p_n pour que le Père Noël effectue une distribution où aucun enfant en reçoit le cadeau qu'il souhaite. On considère que sa vue est tellement basse que chaque distribution est aussi probable.
   Montrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-1}$.

3. On pourra avantageusement utiliser numpy
4. Joli palindrome...
5. Vacances ! Mais nous n'en avons pas fini avec notre histoire.