Algèbre linéaire, révisions

— Supplémentaires, projecteurs, base adaptée (à une somme directe).

— Noyaux des endomorphismes. Bijectivité et déterminant.

— ...

Réduction

— Valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme. Espaces propres.

— Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre. Une somme d'espaces propres est directe.

— Eléments propres des matrices. Polynôme caractéristique.

— Retrouver la trace et le déterminant comme coefficients du polynôme caractéristique.

— La dimension d'un espace propre est au maximum la multiplicité en tant que racine de χ.

— CNS de diagonalisabilité : χ est scindé sur $\mathbb{K}$ et la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la racine de χ correspondante.

— Condition suffisante : χ est scindé à racines simples.

— Equation caractéristique des suite récurrentes linéaires (à tout ordre). Expression quand les racines sont simples.

— Trigonalisation : Toute matrice est semblable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'il le faut) à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont les racines de χ avec multiplicité. En pratique, il faut une indication pour trigonaliser.

— Trace et déterminant en fonction des valeurs propres. Trouver la dernière valeur propre grâce à la trace.

Questions de cours

1. λ est valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$ (de dimension finie) ssi $\chi_f(\lambda) = 0$.
2. Si D est une droite stable par f alors elle est dirigée par un vecteur propre.
3. Expression du polynôme caractéristique d'une matrice carrée de taille 2 : $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$. Appliquer à un exemple et étudier la diagonalisabilité.