Le cadre d'étude est le suivant : on considère des fonctions f continues sur un **segment** $[a, b]$. I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point

I Propriétés de l'intégrale

Interprétation graphique

Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ alors $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ représente

Théorème 1
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On a donc $a \leqslant b$.

1. Linéarité :

   En d'autres termes $\varphi : f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
2. Croissance :
3. Inégalité triangulaire :

Exercice 1
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $M = \sup_{[a,b]} |f|$. Montrer que $\int\limits_a^b |fg| \leqslant M \int\limits_a^b |g|$.

Théorème 2 (Relation de Chasles)

Exercice 2
Calculer $\int_0^{2\pi} |\cos(t)|\mathrm{d}t$.

Intégrer entre deux bornes

Si on a $a > b$, par définition $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t =$

II Théorème fondamental et conséquences

Théorème 3 (Théorème fondamental)
Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. La fonction f est donc **continue** sur un **intervalle**.

1. Soit $x_0 \in I$ fixé. Alors est une primitive de f sur I.

   C'est même la primitive sur I de f qui s'annule en x_0.
2. Si F est une primitive de f sur I et $a, b \in I$ alors $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t =$
3. Si $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})$ alors $f(b) - f(a) =$

Exercice 3
Prouver l'inégalité des accroissements finis dans le cas où $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.

Exercice 4
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{1}{t\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2u + \frac{\pi}{4})\mathrm{d}u$
3. $\int_0^{\pi} e^{4it}\mathrm{d}t$
4. $\int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2+1}\mathrm{d}t$
5. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
6. $\int_0^1 e^{-x}\cos(2x)\mathrm{d}x$

Exercice 5
Tracer la courbe représentative de $\varphi : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ en admettant que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Théorème 4
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction et .

$$\int_a^b f = 0 \Rightarrow \forall t \in [a,b]\ f(t) = 0$$

Exercice 6
Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que $\left(\forall Q \in \mathbb{K}_n[X] \int_0^1 P(t)Q(t) = 0\right) \iff P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Théorème 5 (Intégration par parties)

Exercice 7
Trouver une primitive de ln sur $]0, +\infty[$

Exercice 8
Calculer $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$.

Exercice 9
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\mathrm{d}x$. Calculer $F_1(x)$ puis trouver une relation entre F_n et F_{n+1}.

Exercice 10
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$. Calculer W_0, W_1 puis trouver une relation de récurrence pour la suite (W_n).

En déduire W_n en fonction de n.

Théorème 6 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ pour un entier naturel n et $a, x \in I$. Alors

$$f(x) =$$

Théorème 7 (Changement de variable)
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b], I)$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ On suppose que $\varphi([a,b]) \subset I$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Exercice 11
Calculer $\int_{-1}^1 \mathrm{sh}(t)\cos(\ln(1+t^2))\mathrm{d}t$.

Exercice 12
Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2$ et en déduire la valeur de ces intégrales.

Exercice 13
Calculer :

1. $\int \frac{t^3+2t^2+4t}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t$
2. $\int_0^3 \frac{1}{t^2-2t-8}\mathrm{d}t$
3. $\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$

III Sommes de Riemann

Théorème 8
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.

On appelle somme de Riemann associée à f les sommes

$$Rg_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) \text{ et } Rd_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

Alors les suites $(Rg_n)_n$ et (Rd_n) convergent vers

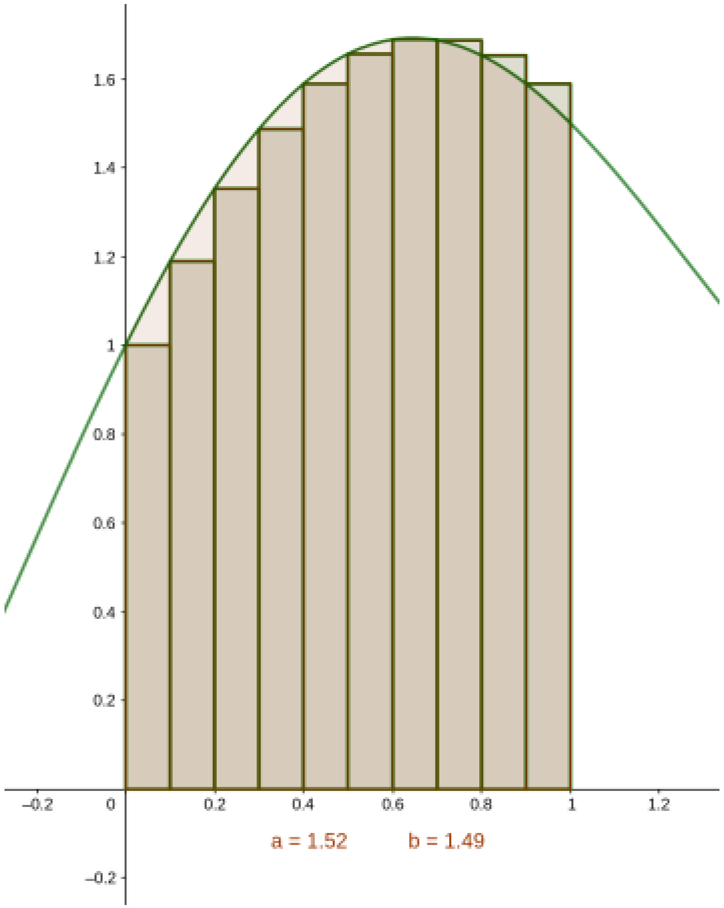
Traduction : $a = 0, \; b = 1$

Pour $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, on a $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

Exercice 14

1. On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Calculer la limite de $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$
3. Déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+2k}\right)^3$
4. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$

Interprétation graphique



IV Primitives usuelles

On fera bien attention aux **intervalles** sur les quelles ces primitives sont définies.

Fonction $x \mapsto$	intervalle	primitive
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_-^*$	$\ln(-x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$-\ln(\cos(x))$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$\arcsin(x)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$\arccos(x)$
$\sin(\alpha x), \alpha \neq 0$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$
$\cos(\alpha x), \alpha \neq 0$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$
$e^{kx}, k \neq 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{k}e^{kx}$