Table des matières

I Opérations vectorielles

On se place dans $\mathbb{R}^n$ avec $n = 2$ ou 3.

I.1 Produit scalaire

I.1.1 Propriétés

Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$ (n = 2 ou 3, mais plus s'il le faut, la définition ne change pas).

Le produit scalaire de X et Y est $(X|Y) = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. avec des notations évidentes pour les coordonnées dans la base canonique.

1. symétrie : $(X|Y) = (Y|X)$. C'est évident sur la formule a l'aide d'une somme. On peut également remarquer que ${}^tXY$ est un nombre et donc ${}^t({}^tXY) = {}^tYX$ est le même nombre.
2. Bilinéarité : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, X_1, X_2, Y \in \mathbb{R}^n$
$$(\lambda X_1 + \mu X_2|Y) = \lambda(X_1|Y) + \mu(X_2|Y)$$
$$(Y|\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda(Y|X_1) + \mu(Y|X_2)$$
3. positivité : $(X|X) \geqslant 0$.
4. le produit scalaire est défini : $(X|X) = 0 \iff X = 0$.
5. On a $\|X\|^2 = (X|X)$.

Exercice 1
Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + 2(X|Y) + \|Y\|^2$. Calculer $\|X-Y\|^2$ et $(X-Y|X+Y)$.

Exercice 2
Exprimer $(X|Y)$ en fonction de normes.

I.1.2 Orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

I.1.3 Distance

La distance entre deux éléments de $\mathbb{R}^n$ est la norme de leur différence : $\mathrm{d}(X,Y) = \|X-Y\| = \|Y-X\|$

Exercice 3
A quelle condition un parallélogramme est-il un losange ? un rectangle ? Le prouver !

I.2 Déterminant

I.2.1 Propriétés

1. n vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^n$ ssi leur déterminant dans la base canonique est non nul.
2. le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne
3. une base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif

I.2.2 Interprétation géométrique

1. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$. $\det_{\mathcal{B}_c}(u,v)$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur u, v.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le déterminant est le volume orienté du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

Exercice 4
1. Soient A, B, C 3 points non alignés de $\mathbb{R}^2$. Exprimer à l'aide d'un déterminant l'aire du triangle ABC.
2. Rappelons que le volume d'un tétraèdre est $V = \frac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante. Exprimer à l'aide d'un déterminant le volume du tétraèdre $ABCD$.
   Rappel : le volume d'un parallélépipède est donné par $B \times h$ où B est l'aire de la base.

I.3 Produit vectoriel

On se place obligatoirement dans $\mathbb{R}^3$ cette fois.

I.3.1 Propriétés

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

1. Si $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u \wedge v$ est orthogonal à u et v.
2. $u \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff u$ et v sont colinéaires.
3. Si u, v sont non colinéaires, $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de l'espace.
4. Le produit vectoriel est bilinéaire.
5. le produit vectoriel est anti-symétrique, ie $u \wedge v = -v \wedge u$.

I.3.2 Construction de base orthonormée directe

Si on a $u, v \in \mathbb{R}^3$ tels que $u \neq 0, v \neq 0$ et $u \perp v$, alors on peut poser $u' = \frac{1}{\|u\|}.u$ et $v' = \frac{1}{\|v\|}.v$. Alors, si $w' = u' \wedge v'$, la base (u', v', w') est orthonormée directe.

Exercice 5
Construire une base orthonormée directe dont les deux premiers vecteurs forment une base du plan $P : x - z = 0$.

II Lieux géométriques

II.1 Droites

II.1.1 Généralités

Les droites (affines) de $\mathbb{R}^n$ sont les ensembles de la forme $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(u)$ où A est un point et u un vecteur directeur non nul. $D = \text{Vect}(u)$ est la direction de $\mathcal{D}$.

Cela revient à donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$. Par exemple dans le plan, $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ ssi $\exists t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = x_A + tx_u \\ y = y_A + ty_u \end{cases}$ avec des notations évidentes pour les coordonnées de A et u. Dans l'espace, on ajoute juste une troisième coordonnée.

II.1.2 Colinéarité

Avec les notations précédente, un point $M \in \mathbb{R}^n$ est un point de $\mathcal{D}$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et u sont colinéaires (penser au déterminant dans $\mathbb{R}^2$).

II.1.3 Cas de $\mathbb{R}^2$

Toute droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ possède une équation de la forme $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul normal à $\mathcal{D}$, ie orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$, ou encore orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathcal{D}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur de $\mathcal{D}$ (non nul !).

Exercice 6
1. Soit $\mathcal{D} : 2x - y + 1 = 0$. Donner deux points, un vecteur directeur et un vecteur normal de $\mathcal{D}$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donner une équation, un vecteur directeur et un vecteur normal de $\mathcal{D} = (AB)$.
3. Donner une équation, un deuxième point et un vecteur normal de $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II.1.4 Savoir faire

Déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles.

Exercice 7
Soit $\mathcal{D} : 3x + 7y - 2 = 0$. Déterminer la distance de $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{D}$. Astuce : si $A, B \in \mathcal{D}$, on pourra calculer l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme.

II.1.5 Cas de $\mathbb{R}^3$

Les droites de l'espace ne possèdent PAS d'équation cartésienne. A la place, on peut les décrire comme intersection de deux plans.

II.2 Plan de $\mathbb{R}^3$

II.2.1 Définition

Un plan de $\mathbb{R}^3$ est un ensemble de la forme $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(u, v)$ où A est un point et (u, v) est libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires). Sa direction est le sous-espace vectoriel de dimension 2 $\text{Vect}(u, v)$.

Ainsi un point M est un point de $\mathcal{P}$ ssi $(\overrightarrow{AM}, u, v)$ est liée (encore une fois, on pensera au déterminant).

II.2.2 Equation

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$. Alors $\mathcal{P}$ possède une équation de la forme $\mathcal{P} : ax+by+cz+d=0$ où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul, normal à $\mathcal{P}$.

Exercice 8
On pose $\mathcal{P} : x - 2y + z - 3 = 0$. Donner une base et un point de $\mathcal{P}$.

Exercice 9
Donner une équation de $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ainsi que 2 autres points de ce plan, de telle manière que la donnée des nos trois points détermine $\mathcal{P}$.

Exercice 10
On pose $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Trouver deux plans dont l'intersection est $\mathcal{D}$. On pourra les donner par des équations.

II.3 Cercles

II.3.1 Définition

Soit Ω un point d'un plan ($\mathbb{R}^2$ ou un plan de $\mathbb{R}^3$). Le cercle de centre Ω et de rayon $R \in]0, +\infty[$ est l'ensemble des points de ce plans à distance R de Ω.

II.3.2 Equation

Dans $\mathbb{R}^2$, tout cercle possède une équation de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ où $\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ est le centre et R le rayon.

II.3.3 Tangentes

La tangente en un point M_0 du cercle $\mathcal{C}$ est la droite passant par M_0 et orthogonale à $\overrightarrow{\Omega M_0}$.

Exercice 11
Pour une droite $\mathcal{D}$ donnée, décrire le lieu des centres des cercles tangents à $\mathcal{D}$ en un point $M_0 \in \mathcal{D}$ fixé.

Exercice 12 (Théorème important)
Soient A, B deux points fixés et distincts du plan.

Décrire l'ensemble $E = \{M \in \mathbb{R}^2 | \ (\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{BM}) = 0\}$.

Exercice 13
Décrire en fonction des rayons et des centres le nombre de points d'intersection de deux cercles du plan.

Exercice 14 (Adaptation à l'espace)
Dans un repère orthonormal direct on donne les points $A : (1, 2, 3)$, $B : (2, 3, 1)$, $C : (3, 1, 2)$, $D : (1, 0, -1)$.

1. Chercher le centre et le rayon de la sphère circonscrite à $ABCD$.
2. Chercher les équations cartésiennes des plans (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).

III Transformations

III.1 Projections et symétries orthogonales

III.1.1 Principe général

1. On projette toujours des vecteurs. Généralement, pour calculer le projeté d'un point M, on projettera en fait un vecteur $\overrightarrow{AM}$.
2. Le but est toujours d'écrire $\overrightarrow{AM}$ comme somme de deux vecteurs. Cette fois les vecteurs sont orthogonaux.

   On pourra penser à utiliser le produit scalaire pour simplifier les calculs.

Exercice 15
Calculer l'expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

III.1.2 Calcul de symétries

On procède comme dans un espace vectoriel. Si on note $p(M)$ le projeté orthogonal de M et $s(M)$ son symétrique orthogonal par rapport à une droite ou un plan passant par A, alors $\overrightarrow{As(M)} = \overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{p(M)M}$ (refaire un schéma).

III.2 Rotations

III.2.1 Dans le plan

La rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est l'application $r_\theta : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)x \end{pmatrix}$, ie l'application linéaire canoniquement associée à $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exercice 16
Calculer $R_\theta R_\varphi$.

III.2.2 Bases orthonormées directes

Toute base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ a une matrice de la forme R_φ.

Exercice 17
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de r_θ dans $\mathcal{B}$.

III.2.3 Rotation autour d'un point

Pour exprimer la rotation autour d'un point A, on appliquera la rotation vectorielle (de centre O) au vecteur $\overrightarrow{AM}$.

Exercice 18
Calculer les coordonnées de l'image de $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ par la rotation de centre $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par deux méthodes : via les matrices et en utilisant les complexes.

Exercice 19
Soit $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donner une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ de la forme (u, v, w).

III.2.4 Rotation dans l'espace

On se contente ici de rotations vectorielles.

Soit $D = \mathrm{Vect}(u)$ une droite de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On **impose** $\|u\| = 1$. Alors on peut trouver v, w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

La rotation d'axe D (orienté par u) et d'angle θ est l'application linéaire r_θ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

III.2.5 Interprétation

Soit P le plan (vectoriel) orthogonal à D. Alors $P = \mathrm{Vect}(v, w)$ et dans ce plan, r_θ a la matrice d'une rotation du plan d'angle θ.

Exercice 20
Donner la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe $\mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Astuce : si une base est orthonormée, alors l'inverse de sa matrice dans la base canonique est simplement sa transposée.