Devoir surveillé n°4

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Application directe)

On considère les matrices carrées

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?
2. Calculer A^2.
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Retrouver sans calcul que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Pour un entier naturel non nul n, on pose $\varphi(n) = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1-2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $\psi(n) = \varphi(\frac{1}{n})$.

1. Donner l'expression de $\varphi(n)$ en fonction de n.
2. Rappeler la formule de Taylor-Young à l'ordre p en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ pour une fonction g de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant x_0.
3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre $2p$ en 0 et en déduire celui de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ à l'ordre $2p+1$ en 0.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser la valeur de cette constante.
5. Déterminer un réel α tel que, pour n assez grand :

$$\left|\cos\left(\varphi(n) + \psi(n) + 2\ln(n)\right) - \frac{\alpha}{n^2}\right| \leqslant \frac{\beta}{n^4}$$

   où β est un réel positif que l'on ne cherchera pas à déterminer.

6. Quelle est la nature de la série $\left(\sum_{n>0} \cos\left(\varphi(n) + \psi(n) + 2\ln(n)\right)\right)$?
7. Quelles est la nature de la série $\left(\sum_{n>0} \cos(\varphi(n))\right)$?

Exercice 3

On considère la courbe Γ dont la représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x(t) &= 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ y(t) &= 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

1. Construire les tableaux de variations des fonctions x et y.
2. Déterminer les points réguliers de Γ dont la tangente est horizontale ou verticale.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point de paramètre $t = 0$.
4. Déterminer le point singulier de Γ. Préciser sa nature ainsi que la tangente à Γ en ce point.
5. Donner la nature des branches infinies de Γ. Illustrer la réponse par un schéma.
6. Tracer la portion de Γ correspondant à $t \in [0, 1]$.

Exercice 4
Partie I

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $R_n(t) = e^t - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

1. Calculer, avec justification, la dérivée de $t \mapsto R_n(t)e^{-t}$.
2. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$ $R_n(t) = e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u} \mathrm{d}u$.
3. Montrer que pour tout réel positif t :
$$|R_n(t)| \leqslant \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}$$

Partie II

On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, telle que
$$g(0) = 0,\ \forall x \in]0,1]\ g(x) = x\ln(x)$$

1. Etudier la continuité et les variations de la fonction g.
2. En déduire que $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$ existe, et donner sa valeur.
3. Tracer la courbe représentative de g. On prendra $e^{-1} \approx \frac{1}{3}$.

Partie II

On pose $I = \int\limits_0^1 x^{-x}$.

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n :
$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int\limits_0^1 x^k \ln(x)^k \mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \tilde{R_n}(x)\mathrm{d}x$$
où on exprimera $\tilde{R_n}$ à l'aide de la fonction R_n de la partie I.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$\left|\int_0^1 \tilde{R_n}(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}}$$
4. Pour tout couple d'entiers naturels (p,q), on pose
$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln(x)^q \mathrm{d}x$$
   (a) Montrer que $I_{p,q}$ est une intégrale convergente.
   (b) Montrer que pour $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$, $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.
   (c) Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q.
5. Montrer que
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Exercice 5
Partie I

On fixe un entier $n \geqslant 1$. Soient U et V les matrices colonnes (à coefficients réels) $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

On suppose U et V non nulles. Soit a un réel et A la matrice définie par
$$A = aI_n + U{}^tV$$

1. Montrer que ${}^tVU$ est un réel que l'on exprimera en fonction des coefficients u_i et v_i.
2. Montrer qu'il existe un réel k tel que $(U{}^tV)^2 = kU{}^tV$.
   En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$
3. On note $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Donner l'expression de a_{ij} en fonction de a et des coefficients de U et V.
   En déduire que $\mathrm{tr}(A) = na + {}^tVU$.
4. Exprimer α et β en fonction de a et $\mathrm{tr}(A)$.
5. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2. En déduire que λ vérifie l'équation
   $$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$$
6. Montrer que les seules valeurs propres possible de A sont
   $$\lambda_1 = a \text{ et } \lambda_2 = \mathrm{tr}(A) - (n-1)a$$
7. On suppose $\mathrm{tr}(U{}^tV) \neq 0$ et on considère les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 définis par
   $$E_i = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = \lambda_i X\}.$$
   (a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.
   (b) Montrer par analyse-synthèse que, pour tout vecteur colonne X, il existe $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ tels que $X = X_1 + X_2$.
   (c) Montrer que A est diagonalisable.

Partie II

Dans cette partie, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^2 puis déterminer une relation entre A^2, A et I_3.
3. Trouver $a \in \mathbb{R}$, $U, V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = aI_3 + U{}^tV$.
4. Vérifier que les résultats de la partie I, questions 1, 3, 4 et 6 sont cohérents avec les valeurs trouvées pour cette matrice A.