Devoir maison n°5

A rendre le 04/12

Vous pouvez rendre une copie pour deux si et seulement si chacun participe à la recherche ET à la rédaction.

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires entières positives ou nulles vérifiant

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \begin{cases} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant i < j \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes fixées vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Quelle est la loi de X ?

   Correction Pour $i \in \mathbb{N}$ fixé

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(X=i, Y=j) \\ &= \lambda^i e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!(i-j)!}\alpha^i(1-\alpha)^{i-j} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\alpha^j(1-\alpha)^j \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \times 1^i\end{aligned}$$

   Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

2. Quelle est la loi de Y ?

   Correction Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{j!}\alpha^j \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i(1-\alpha)^{i-j}}{(i-j)!} = \frac{e^{-\lambda}}{j!}\alpha^j \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+j}(1-\alpha)^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}e^{\lambda(1-\alpha)} = e^{-\lambda\alpha}\frac{(\lambda\alpha)^j}{j!}\end{aligned}$$

   Ainsi Y suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha\lambda$.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

   Correction Non. $\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1) \neq \mathbb{P}(X=0, Y=1)$

4. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z.

   Correction Remarquons que $\mathbb{P}(Z < 0) = 0$ car il faudrait $X < Y$ (des $i < j$ avec les notation de l'énoncé).

   Ainsi Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $Z = k$ ssi $X = i$ pour un $i \geqslant k$ et $Y = i - k$. Ainsi

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=i-k) = e^{-\lambda}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{\lambda^i\alpha^{i-k}(1-\alpha)^k}{(i-k)!k!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(1-\alpha)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+k}\alpha^n}{n!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda(1-\alpha))^k}{k!}e^{\lambda\alpha}\end{aligned}$$

   et on a $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(1-\alpha))$.

5. Soient j et n deux entiers naturels. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = j | Z = n)$.

Correction Par définition,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=j|Z=n) &= \frac{\mathbb{P}(Y=j \text{ et } Z=n)}{\mathbb{P}(Z=n)} = \frac{\mathbb{P}(Y=j, X=n+j)}{\mathbb{P}(Z=n)} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+j}\alpha^j(1-\alpha)^n}{j!n!} \times \frac{n!}{e^{-\lambda+\lambda\alpha}(\lambda(1-\alpha))^n} \\ &= e^{-\lambda\alpha}\frac{\lambda^j\alpha^j}{j!} = \mathbb{P}(Y=j)\end{aligned}$$

6. Que peut-on en déduire pour les variables Y et Z ?

   Correction Elles sont indépendantes. On retrouve le cours sur la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson car $X = Y + Z$ avec Y et Z indépendantes de paramètres $\lambda\alpha$ et $\lambda - \lambda\alpha$ respectivement.

7. On suppose que le nombre d'enfants d'une famille française est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $2,2$. On admet que la probabilité d'avoir un garçon est égale à $1/2$ et que les naissances successives sont indépendantes. Trouver la probabilité que cette famille ait i enfants dont j garçons.

   Correction On note X le nombre d'enfants de notre famille et Y le nombre de garçons. Posons également $\lambda = 2,2$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ (au hasard...)
   Alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et on cherche $\mathbb{P}(X=i, Y=j)$.
   Or, sachant $(X=i)$, la loi conditionnelle de Y est binomiale de paramètres i et α donc $\mathbb{P}(Y=j|X=i) = \binom{i}{j}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}$.
   Ainsi $\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \mathbb{P}(Y=j|X=i)\mathbb{P}(X=i) = \frac{i!}{j!(i-j)!}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$ comme dans le reste de l'exercice et avec nos valeurs numériques on obtient $e^{-2,2}\left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{(2,2)^j}{j!(i-j)!}$